الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـدفـاع الـوطـنـي
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الإستعمـال و التحضير
مديريـة مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2016/2015
دورة ماي 2016

إمتحان البكـالوريـا التجـريبـي
الشعبة :رياضيات

إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 4 ساعات ونصف

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(06 نقاط)

فيما يلي الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

لتكن $\left(P_m\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ التي تحقق $m^2x+\left(m+1\right)y+\left(m^2+m+1\right)z=\left(m+2\right)^2$ حيث m وسيط حقيقي

1. أ) برر أن $\left(P_m\right)$ مستو مهما كان الوسيط الحقيقي m.

ب) بين أن كل المستويات $\left(P_m\right)$ تشمل مستقيما ثابتا (D) يطلب إعطاء تمثيل وسيطي له.

2. نعتبر النقطة $A(0;1;-1)$ و المستقيم (Δ) الذي $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases}x=t+1\\y=t+4\\z=-t\end{cases}$ تمثيل وسيطي له.

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_m\right)$ الذي يحوي (Δ) و يمر بالنقطة A.

3. ليكن $\left(Q\right)$ و $\left(R\right)$ المستويين المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين $x-y+2z+3=0$ و $2x-y+z+2=0$ على الترتيب

أثبت أن $\left(Q\right)$ و $\left(R\right)$ متقاطعان و عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما.

4- لتكن النقطة $I\left(1;0;0\right)$. أ) أثبت أنه يوجد سطح كرة وحيد $\left(S\right)$ ذي المركز I يمس كلا من $\left(R\right)$ و $\left(Q\right)$

ب) أوجد معادلة ديكارتية لــ S.

5- لتكن S_m مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2mx+4my+5m^2-6=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

أ) أثبت أن $\left(S_m\right)$ سطح كرة ، يطلب تعيين مركزه I_m و نصف قطره R.

ب) عين المحل الهندسي للنقط I_m لما m يمسح $\mathbb{R}$.

ج) ناقش حسب قيم m تقاطع $\left(S_m\right)$ و $\left(Q\right)$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

a و b حقيقيان حيث $0<a<b$. $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ متتاليتان معرفتان بـــ $u_0=a$ ، $v_0=b$ و من أجل كل n طبيعي

$$u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n} \quad \text{و} \quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$$

1. أثبت من أجل كل طبيعي n أن $0<u_n\le v_n$.

2. أ) بين من أجل كل طبيعي n أن $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$. (يمكن استعمال النتيجة $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y'}}\le 1$ حيث $x>0$ و $y>0$)

ب) استنتج أن $v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$ من أجل كل طبيعي n.

3. أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4. فيما يلي نضع $a=2$ و $b=5$
بواسطة آلة حاسبة احسب u_3 ثم استنتج قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للنهاية المشتركة للمتتاليتين.

التمرين الثالث:(04 نقاط)

نعتبر المعادلة $(E):3x-8y=5$ حيث x و y صحيحان نسبيان.

1. أثبت أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x=8k-1$ ، $y=3k-1$ و $k\in\mathbb{Z}$.

2. أ) اتكن n ، x و y ثلاثة أعداد صحيحة تحقق $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ أثبت أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

ب) نعتبر الجملة $(S)\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح. أثبت أن n حل للجملة (S) إذا و فقط إذا كان $n\equiv 23[24]$

3. تأكد أن 2015 حل للجملة (S) ثم استنتج أن $2015^{1436}-1$ يقبل القسمة على 24 .

التمرين الرابع:(06نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-x-1$ ، و g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-1-2\ln x$ نسمي C منحنى الدالة f و γ منحنى الدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I. 1 أدرس النهايات واتجاه تغير الدالة f .

2. أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

3. أدرس وضعية (C) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل.

4. أ) أكتب معادلة المماس (T_a) عند نقطة من (C) ذات الفاصلة a .

ب) بين أنه يوجد مماس وحيد (T) لـ (C) يشمل النقطة $P(-1+\ln 2;-\ln 2)$

ج) أكتب معادلة للمماس (T).

5. أنشئ (C) و مستقيمه المقارب المائل ومماسه عند النقطة P .

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر التحويل النقطي s الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1-i)z+1$

1. عين طبيعة s و عناصره المميزة.

2. نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية.

أ) أوجد x' و y' بدلالة x و y .

ب) أثبت أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C) فإن صورتها $M'(x';y')$ بواسطة s هي نقطة من γ .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـدفـاع الـوطنـي — **السنة الدراسية:2016/2015**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **دورة ماي 2016**

دائرة الإستعمـال و التحضير

مديريـة مدارس أشبال الأمة

إمتحان البكـالوريـا الـتجـريبـي

الشعبة :رياضيات

إختبار في مادة الرياضيات — **المدة: 04 ساعات و نصف**

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n)متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$ بحيث حدودها أعداد طبيعية .

1) أ) تحقق أن : $u_1+u_5=2u_3$.

ب)احسب u_3 علما أن $u_1+u_3+u_5=150$.

2) نضع $d=PGCD(u_1;u_5)$ و $m=PPCM(u_1;u_5)$.

عين العددين u_1 و u_5 علما أن $m=6d$ ثم استنتج أن $u_4-u_2=10$.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_2+u_3+u_4+.....+u_{n+1}$.

ب) عين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة حتى يكون $2S_n$ قابلا للسمة على 15 .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبرالتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(m-i)z+b$. (m عدد حقيقي و b عدد مركب).

1)أ) عين مجموعة قيم m حتى يكون T دوران يطلب تعيين زاويته .

ب) عين العدد المركب b حتى يكون مركز الدوران هو النقطة A ذات اللاحقة $-1+4i$.

2) نضع : $m=\sqrt{3}$ و $b=x+iy$ حيث: x و y عددان حقيقيان.

أ) أثبت أن T تشابه مباشر يطلب تعيين نسبته وزاويته .

ب) عين العدد المركب z_0 لاحقة النقطة w مركز التشابه T وذلك بدلالة x و y .

3) نسمي P صورة العدد المركب b .

أ) عين (Γ) مجموعة النقط P بحيث يكون z_0 عددا تخيليا صرفا .

ب) أنشئ المجموعة (Γ).

ج) عبر عن z_0 بدلالة x.

4) نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=-1+4i$ ، $z_B=1$ و $z_C=y\,i$. عين العددان الحقيقيان y و β حتى تكون النقطة O (مبدأ المعلم) مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,2);(B,\beta);(C,3)\}$.

5)أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{7\pi}{6}$.

6) بين أن التحويل النقطي $T\circ S$ تحاكي يطلب تعيين نسبته .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و m عدد حقيقي .

لتكن (P_m)مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx-y+(2-m)z+m+4=0$.

1) بين أن (P_m)مستو من أجل كل عدد حقيقي m .

2) بين أن جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

3) عين m حتى يكون (P_2) عموديا على (P_m) .

4) نعتبر النقطة $H(0;1;1)$ من الفضاء . أحسب المسافة بين H و (Δ) .

5) أ) ليكن (S) سطح الكرة ذو المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-3=0$. عين مركز ونصف قطر (S).

ب)عين المستويات (P_m) التي تمس (S) .

6) نعتبر المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=-3t-1 \end{cases}$حيث $t\in\mathbb{R}$.

أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (D) والمستوي (P_m) . في حالة التقاطع عين إحداثيات نقطة التقاطع .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بالعبارة: $f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.

(C_α) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول:

1) أدرس تغيرات الدالة f_α .

2)استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما يكون $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.

3) بين أن جميع المنحنيات (C_α)تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها.

الجزء الثاني: نأخذ $\alpha=1$:

1) باستعمال السؤال(2) من الجزء الأول، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم β يكون $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.

2)استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}$.

3) استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}\right)$.

4) عين احداثيي النقطة w التي يكون عندها معامل توجيه المماس للمنحنى (C_1) يساوي1 .

5) عين معادلة لمماس المنحنى (C_1) عند النقطة w ثم أنشئ (C_1)والمماس.

الجزء الثالث: لتكن gالدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=\ln(1+|x|)-|x|$.

أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند الصفر.

ب) بين كيف يمكن إنشاء التمثيل البياني (C_g)للدالة gاعتمادا على (C_1) ثم أنشئ (C_g) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الــدفــاع الــوطنــــي — السنة الدراسية:2016/2015

أركان الجيش الوطني الشعبي — دورة ماي 2016

دائرة الإستعمـــال و التحضير — الشعبة :رياضيات

مديريـــة مدارس أشبال الأمة

الإجابة النموذجية لإمتحان البكـالوريـا الـتجــريبـي في مادة الرياضيات - الموضوع الأول

التمرين الأول:(06 نقاط)

1 - أ (P_m) مستو لأن الأعداد m^2، $m+1$ و m^2+m+1 لا تنعدم معا. 0,25

ب-من أجل كل حقيقي m

$m^2x+(m+1)y+(m^2+m+1)z=(m+2)^2$ 0,25

$m^2x+my+y+m^2z+mz+z-m^2-4m-4=0$

$m^2(x+z-1)+m(y+z-4)+y+z-4=0$

يعني: $\begin{cases}x+z-1=0\\y+z-4=0\end{cases}$ 0,25

يعني $\begin{cases}x=-z+1\\y=-z+4\end{cases}$ بوضع $z=t$ نحصل على 0,25

$\begin{cases}x=-t+1\\y=-t+4\ t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

2-نختار نقطة من (Δ) مثلا $B(1;4;0)$ من أجل $t=0$ 0,25

$\vec{n}(a;b;c)$ ناظمي للمستوي (P) يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 0,25

حيث شعاع توجيه (Δ) نجد $\begin{cases}a+b-c=0\\a+3b+c=0\end{cases}$ يعني 0,25

$\begin{cases}a+b-c=0\\a+3b+c=0\end{cases}$ إذن $\begin{cases}2a+4b=0\\a+b-c=0\end{cases}$ يعني $\begin{cases}a=-2b\\c=-b\end{cases}$ 0,25

إذن $\vec{n}(-2b;b;-b)$ بوضع $b=-1$ نجد $\vec{n}(2;-1;1)$

معادلة من الشكل $2x-y+z+d=0$ بتعويض احداثيات 0,25

A نجد $2x-y+z+2=0$

3- $\overrightarrow{n_Q}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{n_Q}$ و $\overrightarrow{n_R}(2;-1;1)$ $\overrightarrow{n_R}$ غير مرتبطين 0,25

خطيا و منه المستويان متقاطعان.

نحل الجملة $\begin{cases}-x+z+1=0\\x-y+2z+3=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+2z+3=0\\2x-y+z+2=0\end{cases}$ 0,25

بوضع $\begin{cases}x=z+1\\y=3z+4\end{cases}$ $z=k$ نجد $\begin{cases}x=k+1\\y=3k+4\ k\in\mathbb{R}\\z=k\end{cases}$ 0,25

4-أ- $d(I;(Q))=d(I;(R))=\frac{|4|}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 2x0,25

ب- يوجد سطح كرة وحيد S ذي المركز I يمس كلا من R و Q 0,25

معادلته $(x-1)^2+y^2+z^2=\frac{8}{3}$ 0,25

5-أ- $x^2+y^2+z^2-2mx+4my+5m^2-6=0$

$(x-m)^2+(y+2m)^2+z^2=6$ 0,25

و منه المركز هو $I_m(m;-2m;0)$ و $R=\sqrt{6}$

ب-المحل الهندسي للنقطة I_m هو المستقيم ذي تمثيل وسيطي 0,25

$\begin{cases}x=m\\y=-2m\ m\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}$ 0,25

ج- $d(I_m;(Q))=\frac{|3(m+1)|}{\sqrt{6}}$

إذا كان $\frac{|3(m+1)|}{\sqrt{6}}>\sqrt{6}$ يعني $|3(m+1)|>6$ 0,5

يعني $\begin{cases}m>1\\m<-3\end{cases}$ فإن S_m و Q لا يتقاطعان 0,25

إذا كان $\frac{|3(m+1)|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$ يعني أ $\begin{cases}m=1\\و\\m=-3\end{cases}$ فإن S_m و Q متماسان. 0,5

إذا كان $\frac{|3(m+1)|}{\sqrt{6}}<\sqrt{6}$ يعني $-3<m<1$ فإن S_m و Q متقاطعان وفق دائرة.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

1-لدينا $u_0=a$ و $v_0=b$ موجبان تماما لنفرض أن $u_n>0$ و $v_n>0$ إذن $\sqrt{u_nv_n}>0$ و $\frac{u_n+v_n}{2}>0$ 0,5

يعني $u_{n+1}>0$ و $v_{n+1}>0$ ومنه نستخلص المطلوب

لدينا $a<b$ يعني $u_0<v_0$

لنفرض أن $u_n\le v_n$ إذن 0,5

$$(v_{n+1})^2-(u_{n+1})^2=\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2-(u_nv_n)$$
$$=\frac{(u_n-v_n)^2}{2}>0$$

و بما أن $u_n>0$ و $v_n>0$ فإن $u_{n+1}\le v_{n+1}$

و منه نستخلص المطلوب.

من أجل كل طبيعي n

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_nv_n}=\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)^2}{2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)}{\left(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}\right)}\times\frac{(u_n-v_n)}{2}$$ 0,5

و منه حسب الارشاد

$$\frac{\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)}{\left(\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}\right)}\times\frac{(u_n-v_n)}{2}<\frac{1}{2}(u_n-v_n)$$

يعني $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$ 0,25

ب-لدينا $v_0-u_0\le\frac{1}{2^0}(b-a)$

نفرض أن $v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ حيث $(n\ge 0)$

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$ 0,75

من السؤال السابق نجد $\le\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$

$\le\frac{1}{2^{n+1}}(v_0-u_0)$

3-كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n}=\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}\ge 1$ و منه (u_n) متزايدة على ℕ. 0,5

من أجل كل طبيعي n

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n$$
$$=\frac{u_n-v_n}{2}\le 0$$ 0,5

و منه (v_n) متناقصة على ℕ.

بما أن من أجل كل طبيعي n أن

$$0<v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$$

و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}(b-a)\right)=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ 0,25

إذن و متجاورتان

4- $u_3=3,3289968$ إذن $l\approx 3,328$ 0,25

و منه $3(x+1)=8(y+1)$ 0,25

3 يقسم الجداء $8(y+1)$ و أولي مع 8 فهو يقسم $y+1$ 0,5

يعني $y=3k-1$ حيث $k\in$ ℤ و بتعويض y في E

نجد $x=8k-1$ 0,5

$\begin{cases}n=3x+2\\n=8y+7\end{cases}$ يستلزم $3x+2=8y+7$ يعني

$3x-8y=5$ و منه $(x;y)$ حل للمعادلة (E). 0,5

2-أ- $\begin{cases}n\equiv 2[3]\\n\equiv 7[8]\end{cases}$ يكافئ $x;y\in$ ℤ $\begin{cases}n=3x+2\\n=7y+8\end{cases}$

ب- $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حسب السؤال 2 أ) 0,25

و منه $x=8k-1$ و $y=3k-1$ إذن

$n=3x+2=3(8k-1)+2=24k-1$

يعني $n\equiv -1[24]$ و منه $n\equiv 23[24]$

نفرض أن $n\equiv 23[24]$ يعني $n=24k+23$ 0,5

و منه $\begin{cases}n-2=24k+21=3(7k+8)\\n-7=24k+16=8(8k+7)\end{cases}$ 0,25

يعني $\begin{cases}n\equiv 2[3]\\n\equiv 7[8]\end{cases}$

3-لدينا $2015=3\times 671+2$ يعني $2015\equiv 2[3]$ 0,25 0,25

و $2015=8\times 251+7$ يعني $2015\equiv 7[8]$

يعني أن $2015\equiv 23[24]$ إذن $2015\equiv -1[24]$ 0,25

إذن $2015^{1436}\equiv(-1)^{1436}[24]$

$2015^{1436}\equiv 1[24]$ أخيرا $2015^{1436}-1\equiv 0[24]$ 0,25

يعني أن $2015^{1436}-1$ يقبل القسمة على 24 .

التمرين الرابع: (06 نقاط) 0,25

1-I

$\lim_{x\to-\infty}e^x-x-1=-\infty$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-xe^x-e^{-x}\right)=+\infty$ 0,25

من أجل كل x من ℝ $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)>0$ على $]0;+\infty[$ و منه f متزايدة تماما 0,5

$f'(x)<0$ على $]-\infty;0[$ و منه f متناقصة تماما

$f'(0)=0$ 0,25

التمرين الثالث:(04 نقاط)

0,25

1-$(-1;-1)$ حل خاص للمعادلة (E)

إذن $3x-8y=5$ و $3(-1)-8(-1)=5$

2-بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

فإن المستقيم ذو معادلة $y=-x-1$ هو مقارب مائل لـ C بجوار $-\infty$

0,25

3-من أجل كل حقيقي x فإن $f(x)-(x-1)=e^{x}>0$

و منه C يقع دوما فوق مقاربه.

0,25

4-أ-معادلة المماس

$T_a: y=\left(e^{a}-1\right)(x-a)+e^{a}-a-1$

$T_a: y=\left(e^{a}-1\right)x-ae^{a}+e^{a}-1$

ب-$P\in T_a$ يعني

0,5

$-\ln 2=\left(e^{a}-1\right)(-1+\ln 2)-ae^{a}+e^{a}-1$

$-\ln 2=-e^{a}+e^{a}\ln 2+1-\ln 2-ae^{a}+e^{a}-1$

$e^{a}\ln 2-ae^{a}=0$ يعني $e^{a}(\ln 2-a)=0$

0.25

$a=\ln 2$

ج- $T: y=x-1-2\ln 2$

0,75

-5

0,25

II-1- بما أن $|1-i|=\sqrt{2}$ و

0,25

فإن $Arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

0,25

s تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{2}$ و زاويته $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ و مركزه

0,25

Ω صورة العدد المركب $z_0=\dfrac{1}{1-(1-i)}=-i$ يعني

$\Omega(0;-1)$

0,5

2-أ- $z'=(1-i)z+1$ يكافئ

$x'+iy'=(1-i)(1+iy)+1$

يعني $\begin{cases} x'=x+y+1 \\ y'=y-x \end{cases}$

0,75

0,25

$x'+y'-1=2e^{\frac{x'-y'-1}{2}}-(x'-y'-1)-2$

$y'=x'-2\ln x'-1$ يعني $y=x-2\ln x-1$ و

المطلوب

		ب– $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = y - x \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = \dfrac{x' - y' - 1}{2} \\ y = \dfrac{x' + y' - 1}{2} \end{cases}$ $y = e^x - x - 1$ يكافئ $\dfrac{x' + y' - 1}{2} = e^{\frac{x' - y' - 1}{2}} - \dfrac{x' - y' - 1}{2} - 1$	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الـــوطنـــي
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الإستعمـــال و التحضير
مديريـــة مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية:2016/2015
دورة ماي 2016

إمتحان البكـــالوريـــا الـتجـــريبـــي
الشعبة : رياضيات

إختبار في مادة الرياضيات — المدة: 4 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	1) أ) $u_1+u_5=u_3-2r+u_3+2r=2u_3$.	0.5 ن	04 ن
	ب) $u_1+u_3+u_5=150$ تكافئ $3u_3=150$ ومنه $u_3=50$.	0.5 ن	
	2) لدينا $\begin{cases}u_1=da\\u_5=db\\a<b\\PGCD(a;b)\\m=dab\end{cases}$ بالتعويض في العلاقة $\begin{cases}m=6d\\u_1+u_5=100\end{cases}$ نجد $\begin{cases}ab=6\\d(a+b)=100\\a<b\\PGCD(a;b)\end{cases}$	0.75 ن	
	ومنه $(a;b)=(2;3)$ و $d=20$ وبالتالي $(u_1;u_5)=(40;60)$	0.5 ن	
	الاستنتاج : $u_4-u_2=u_5-u_3=10$.	0.5 ن	
	3) أ) $S_n=u_2+u_3+u_4+.....+u_{n+1}=\frac{n}{2}(u_2+u_{n+1})=\frac{n}{2}(85+5n)$.	0.5 ن	
	ب) $2S_n\equiv0[15]$ معناه $n(85+5n)\equiv0[3]$ أو $n(85+5n)\equiv0[5]$ ومنه $n(1+2n)\equiv0[3]$ أي $n\equiv0[3]$ أو $n\equiv1[3]$ ومنه $n\in\{3k;3k+1 / k\in\mathbb{N}\}$.	0.75 ن	
التمرين الثاني	1) أ) T دوران معناه $\lvert m-i\rvert=1$ ومنه $m=0$ وزاوية الدوران هي $\theta\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.	0.5 ن	05 ن
	ب) مركز الدوران هو النقطة $A(-1+4i)$ معناه $\frac{b}{1+i}=-1+4i$ ومنه $b=-5+3i$.	0.5 ن	
	2) من أجل: $m=\sqrt{3}$ و $b=x+iy$ تكون $z'=(\sqrt{3}-i)z+x+iy$.		
	أ) $\lvert\sqrt{3}-i\rvert=2$ و $arg(\sqrt{3}-i)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ومنه T تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.	0.75 ن	
	ب) لاحقة w مركز التشابه T هي $z_0=\frac{x+iy}{1-\sqrt{3}+i}=\frac{\left[(1-\sqrt{3})x+y\right]+i\left[(1-\sqrt{3})-x\right]}{5-2\sqrt{3}}$	0.25 ن	
	3) نسمي P صورة العدد المركب b .		
	أ) z_0 عددا تخيليا صرفا معناه $(1-\sqrt{3})x+y=0$ ومنه (Γ) هي المستقيم ذو المعادلة: $(1-\sqrt{3})x+y=0$.	0.5 ن	

ب) إنشاء المجموعة (Γ): — 0.5 ن

ج) من اجل $(1-\sqrt{3})x+y=0$ يكون $y=(\sqrt{3}-1)x$ ومنه $z_0=-ix$.

4) O (مبدأ المعلم) مرجحا للجملة المثقلة $\{(A,2);(B,\beta);(C,3)\}$ — 0.5 ن

معناه $2z_A+\beta z_B+3z_C=0$ ومنه $-2+8i+\beta+3yi=0$ وبالتالي $y=-\frac{8}{3}$ و $\beta=2$. — 0.5 ن

5) العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{7\pi}{6}$ هي:

$z'=(-\sqrt{3}-i)z$ — 0.5 ن

6) لدينا $(\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}-i)=-4$ ومنه TOS تحاكي نسبته -4 . — 0.5 ن

التمرين الثالث — 04 ن

1) لكل $m\in\mathbb{R}$ لدينا $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$ ومنه (P_m) مستو من أجل كل عدد حقيقي m . — 0.25 ن

2) $mx-y+(2-m)z+m+4=0$ تكافئ $m(x-z+1)-(y-2z-4)=0$

أي $\begin{cases}x-z+1=0\\y-2z-4=0\end{cases}$ ومنه جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم

$(\Delta):\begin{cases}x-z+1=0\\y-2z-4=0\end{cases}$. — 0.5 ن

تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) : $(\Delta):\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t\\z=t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$ — 0.25 ن

3) (P_2) عموديا على (P_m) معناه $\overrightarrow{n_2}(2;-1;0)$ عمودي على $\overrightarrow{n_m}(m;-1;2-m)$

ومنه $2m+1=0$ أي $m=-\frac{1}{2}$. — 0.5 ن

4) لتكن E المسقط العمودي للنقطة H على (Δ) .

نحل الجملة $\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t\\z=t\\x+2y+z-3=0\end{cases}$ نجد $E\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$ ومنه $d((\Delta);H)=HE=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. — 0.5 ن

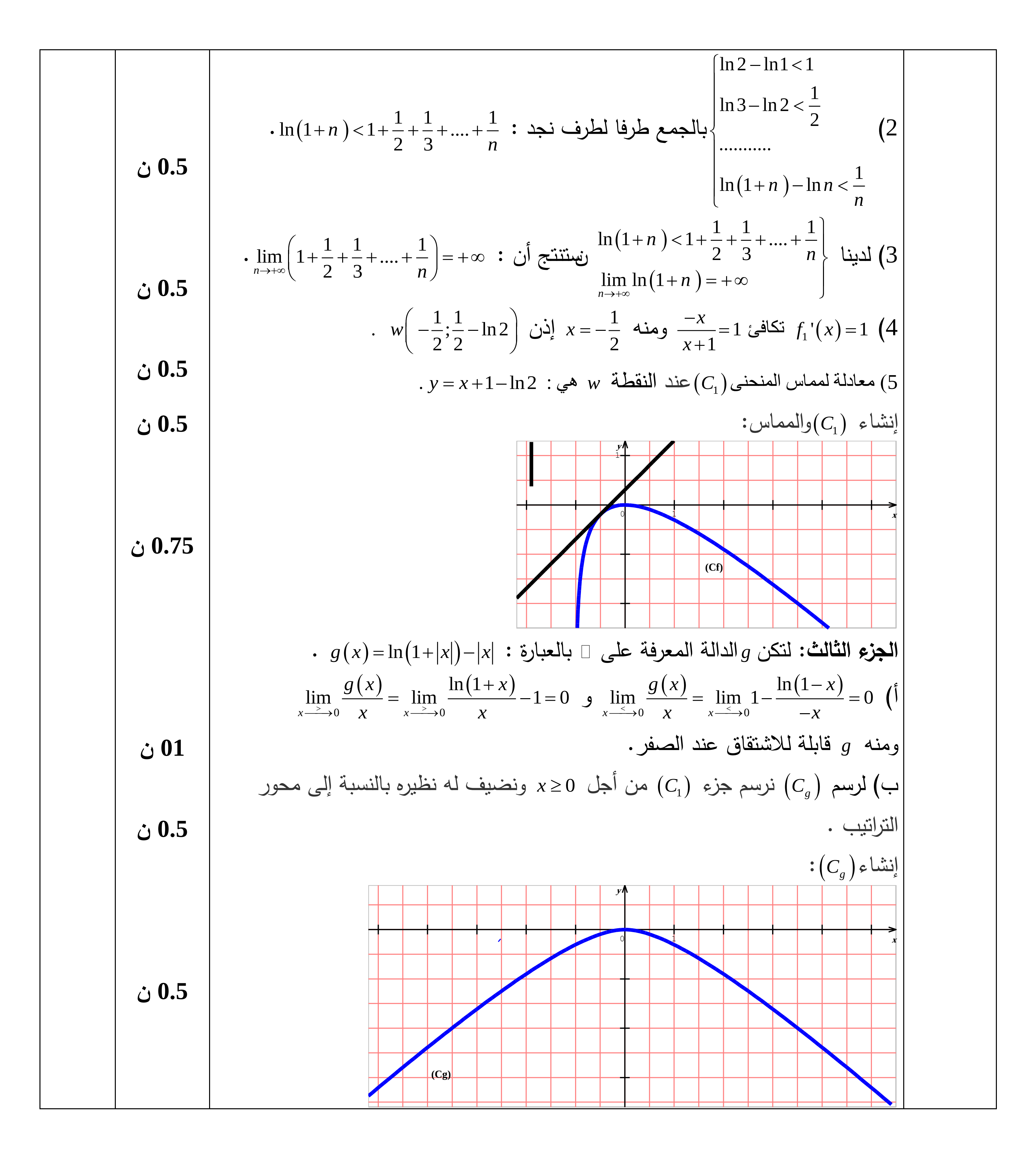
5) أ) $x^2+y^2+z^2-2y-2z-3=0$ تكافئ $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$

ومنه مركز الكرة هو $H(0;1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ب) (P_m) تمس (S) معناه $d((P_m);H)=\sqrt{5}$ أي $\frac{5}{\sqrt{m^2+1+(2-m)^2}}=\sqrt{5}$ — 0.5 ن

	ومنه $2m^2-4m=0$ وبالتالي $m=0$ أو $m=2$ إذن المستويان العموديان على (S) هما (P_2) و (P_0) .	0.5 ن	
	6) بحل الجملة $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \\ z=-3t-1 \\ mx-y+(2-m)z+m+4=0 \end{cases}$ نجد $(5m-7)t+3m-1=0$.		
	من أجل $m=\frac{7}{5}$ المعادلة لا تقبل حلولا في ℝ ومنه (D) و (P_m) متوازيان تماما .	0.25 ن	
	من أجل $m\neq\frac{7}{5}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا $t=\frac{1-3m}{5m-7}$ ومنه (D) يقطع (P_m) في النقطة $F\left(\frac{2m-5}{5m-7};\frac{12m-20}{5m-7};\frac{4m+4}{5m-7}\right)$	0.75 ن	
التمرين الرابع	من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما α نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ بالعبارة: $f_\alpha(x)=\ln(\alpha x+1)-\alpha x$.		07 ن
	الجزء الأول:		
	1) دراسة تغيرات الدالة f_α :		
	$f_\alpha'(x)=\frac{-\alpha^2 x}{\alpha x+1}$	0.25 ن	
	إشارة $f_\alpha'(x)$ هي إشارة $-\alpha^2 x$.	0.25 ن	
	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{\alpha}} f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{\alpha}} \ln(\alpha x+1)-\alpha x=-\infty$	0.25 ن	
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+1)\left(\frac{\ln(\alpha x+1)}{\alpha x+1}-\frac{\alpha x}{\alpha x+1}\right)=-\infty$	0.25 ن	
	جدول التغيرات:		
	(جدول التغيرات أدناه)	0.25 ن	
	2) من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا $f_\alpha(x)<0$ ومنه $\ln(\alpha x+1)<\alpha x$.	0.25 ن	
	3) لكل $x\in\left]-\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ و $\alpha>0$ لدينا $f_\alpha(0)=0$ ومنه جميع المنحنيات (C_α) تتقاطع في النقطة $O(0;0)$.	0.25 ن	
	الجزء الثاني: نأخذ $\alpha=1$:1) باستعمال2) نجد $\ln(x+1)<x$ وبتعويض x بالعدد $\frac{1}{\beta}$ نجد $\ln(1+\beta)-\ln\beta<\frac{1}{\beta}$.	0.5 ن	

x	$-\frac{1}{\alpha}$	0	$+\infty$
$f_\alpha'(x)$	+	0	−
$f_\alpha(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$



2) $\begin{cases} \ln 2-\ln 1<1 \\ \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ln(1+n)-\ln n<\frac{1}{n} \end{cases}$ بالجمع طرفا لطرف نجد : $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}$.	0.5 ن
3) لدينا $\left.\begin{array}{l} \ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty \end{array}\right\}$ نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.	0.5 ن
4) $f_1'(x)=1$ تكافئ $\frac{-x}{x+1}=1$ ومنه $x=-\frac{1}{2}$ إذن $w\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\ln 2\right)$.	0.5 ن
5) معادلة لمماس المنحنى (C_1) عند النقطة w هي : $y=x+1-\ln 2$.	0.5 ن
إنشاء (C_1) والمماس: (Cf)	0.75 ن
الجزء الثالث: لتكن g الدالة المعرفة على ℝ بالعبارة : $g(x)=\ln(1+\|x\|)-\|x\|$.	
أ) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}1-\frac{\ln(1-x)}{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{g(x)}{x}=$ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(1+x)}{x}-1=0$ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)}{x}=$ ومنه g قابلة للاشتقاق عند الصفر.	01 ن
ب) لرسم (C_g) نرسم جزء (C_1) من أجل $x\geq 0$ ونضيف له نظيره بالنسبة إلى محور التراتيب .	0.5 ن
إنشاء (C_g): (Cg)	0.5 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2015/2014

الدورة : ماي 2015

المـادة : رياضيات

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 ساعات و نصف

الإمتـحان التجـريبي في مـادة الرياضيات

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتهما $z_A=4+2i$ ، $z_B=3-i$

1) ا) أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_B}$.

ب) إستنتج طبيعة المثلث ABO .

2) نعتبر التحويل النقطي R في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .

ا) بيّن أنّ العبارة المركبة للتحويل النقطي R هي: $z'=-iz+1+3i$.

ب) عيّن طبيعة التحويل R وعناصره المميزة.

ج) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل R .

د) إستنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.

ه) عيّن مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z حيث: $|z|=|z-4-2i|$.

3) ا) من أجل $z\neq 2+i$ ، نضع: $L=\frac{z'-2-i}{z-2-i}$. بيّن أنّ: $L=-i$.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث L^n عددًا حقيقيًا.

ج) بيّن أنّ: $(z-2-i)^2+(z'-2-i)^2=0$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ليكن (P_1) المستوي الذي معادلته: $-2x+y+z-6=0$ ، والمستوي (P_2) الذي معادلته: $x-2y+4z-9=0$.

1) أثبت أنّ: (P_1) و (P_1) متعامدان.

2) ليكن (D) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=2t-7 \\ y=3t-8 \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

أثبت أن المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (P_1) و (P_1) .

3) لتكن M_t نقطة كيفية من المستقيم (D) إحداثياتها $M_t(2t-7,3t-8,t)$ ولتكن A النقطة التي إحداثياتها $A(-9,-4,-1)$

ولتكن f الدالة المعرفة على $\Re$ بـ: $f(t)=AM_t^{\,2}$.

ا) أكتب $f(t)$ بدلالة t .

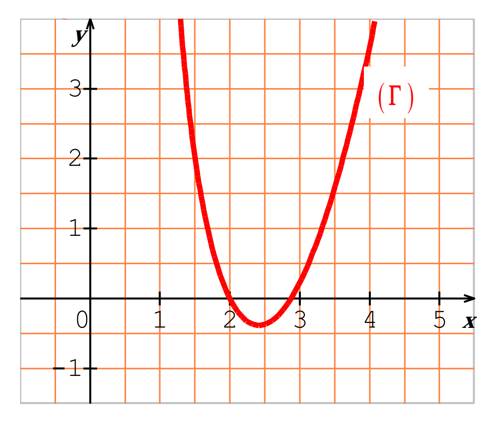
ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، إستنتج قيمة للعدد الحقيقي t_0 التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر .
ثم عيّن إحداثيات النقطة $I = M_{t_0}$.
ج) أثبت أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .
د) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A و العمودي على المستقيم (D) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية u_n المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
حيث: e هو أساس اللوغاريتم النيبيري.
ولتكن المتتالية v_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $v_n = \ln u_n$.
1) ا) بيّن أنّ v_n متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .
ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ ، $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.
ا) أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e^{S_n}$.
ب) أكتب عبارة S_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة P_n بدلالة n .
ج) عيّن نهاية المتتالية S_n ، إستنتج نهاية المتتالية P_n .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ (حيث: $\ln$ اللوغاريتم النيبيري)
(Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل .
1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) ، عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.
2) أحسب $g(2)$ ، ثم بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.
3) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.
II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \dfrac{4\ln(x-1)}{x-1} + \dfrac{5}{x-1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1) أحسب $\lim\limits_{x \to 1^{+}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيًا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) ا) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
3) ا) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.
ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
4) أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) = 3,9$)
5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$.
ا) أحسب $h'(x)$ ، ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1, +\infty[$.
ب) أحسب التكامل $\int_2^5 f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانيًا .

بالتوفيق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2015/2014

الدورة : ماي 2015

المادة : رياضيات

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 ساعات و نصف

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية u_n المعرفة على N بـ: $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

ولتكن المتتالية v_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $v_n = u_n + 6$.

1) ا) بيّن أنّ v_n متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) نعتبر المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

أحسب S_n بدلالة n ، ثم إستنتج S'_n بدلالة n .

2) نعرف المتتالية w_n بـ: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $w_n = \ln(v_n)$ (حيث : $\ln$ اللوغاريتم النيبيري) .

ا) بيّن أنّ w_n متتالية حسابية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب) أحسب بدلالة n المجموع: $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ ، إستنتج النهاية $\lim_{n \to +\infty} S''_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر المجموعة (S) للنقط $M(x, y, z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$.

1) بيّن أنّ (S) سطح كرة يُطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها .

2) نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة: $2x - 2y + z - 2 = 0$.

ا) حدّد الوضع النسبي للمستوي (Q) وسطح كرة (S) .

ب) بيّن أنّ نقط تقاطع المستوي (Q) والسطح الكروي (S) هو دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

3) نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة: $2mx + (1-2m)y + mz + 1 - 2m = 0$ حيث m عدد حقيقي .

ا) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0,-1,0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,0,-2)$.

بيّن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_m) .

ب) حدّد العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) مماسًا للسطح كرة (S) .

ج) حدّد العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) عمودي على المستوي (Q) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

تعطى النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1+i$ ، $z_D=1-3i$.

1) أثبت أنّ D هي مرجح الجملة المثقلة $A,5\ ;\ B,3\ ;\ C,-6$.

2) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z+2|=|z+1-i|$.

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الآسي ، ثم إستنتج طبيعة المثلث BCD .

4) ا) أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الآسي.

ب) إستنتج أن D هي صورة C بتحويل نقطي f يُطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

ج) إستنتج $|z_A-z_{B'}|$ حيث B' هي صورة B بالتحويل f ، ثم أحسب عندئذ مساحة المثلث ABB' .

5) لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{-1}{2}$. عيّن العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω ويحول D إلى C .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathfrak{R}$ بــ: $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$.

1) ا) عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2) أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathfrak{R}$.

3) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathfrak{R}$ كما يلي : $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ا) عيّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له .

4) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) ا) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

6) بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث : $-3,5<\alpha<-3$ و $0,5<\alpha<1$.

7) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

8) h دالة عددية معرفة على $\mathfrak{R}^*$ كما يلي : $h(x)=\frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

ا) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب) أحسب $h'(x)$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

بالتوفيق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2015/2014

الدورة : ماي 2015

المـادة : الرياضيات

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 ساعة و نصف

تصحيح نموذجي للإمتحان التجريبي في مـادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول:

لدينا: $z_A = 4+2i$ و $z_B = 3-i$.

1-أ) * $\frac{z_B - z_A}{z_B} = -i$ 0.5

* $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ و $\left|\frac{z_B - z_A}{z_B}\right| = 1$ و منه $\frac{z_B - z_A}{z_B} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 0.5

ب) المثلث $AB0$ قائم في B 0.25

2-أ) نبين أن العبارة المركبة للتحويل R هي : $z' = -iz + 1+3i$.

لدينا: $z_B = az_A + b$ و $z_O = az_B + b$ و منه نجد $a = -i$ و $b = 1+3i$ 0.5

ومنه العبارة المركبة للتحويل R هي: $z' = -iz + 1+3i$.

ب) التحويل R هو دوران مركزه $w\,(2;1)$ و زاويته $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ 0.5

ج) $z_C = 1+3i$ 0.25

د) الرباعي $ABOC$ هو مربع.. 0.5.

هـ) مجموعة النقط M التي تحقق : $|z-4-2i| = |z|$ يكافئ: $AM = OM$ 0.25

و منه مجموعة النقط M هي محور $[AO]$ 0.25

3-أ) لدينا: $L = \frac{z'-2-i}{z-2-i} = \frac{-i\,(z-2-i)}{z-2-i} = -i$ و هو الطلوب.. 0.5.

ب) لدينا: $L^n = (-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$

L^n حقيقي يكافئ $n = 2k$ مع $k \in \mathbb{N}$ 0.5

ج) لدينا: $\frac{z'-2-i}{z-2-i} = -i$ ومنه $\left(\frac{z'-2-i}{z-2-i}\right)^2 = -1$.

وعليه : $(z'-2-i)^2 + (z-2-i)^2 = 0$ 0.5

التمرين الثاني:

1) لدينا: $\vec{n}_{p_1}(-2;1;1).\vec{n}_{p_2}(1;-2;4) = 0$ و منه $(p_1) \perp (p_2)$ 0.5

2) الجملة $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -8+3t \\ z = t \end{cases}$ (I) هي تمثيل وسيطي للمستقيم (D) مع $t \in \mathbb{R}$.

لدينا الجملة (I) تحقق معادلتي (p_1) و (p_2) و منه $(D)=(p_1)\cap(p_2)$ ....01.

3-أ) $f(t)=14t^2-14t+12$ 0.5

ب) دراسة إتجاه تغير f :

$f'(t)=28t-14$ ....0.25.

f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ 0.5

جدول تغيرات f 0.25

t	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	- - - 0 + + +
$f(t)$	$+\infty$ ↘ $\frac{35}{2}$ ↗ $+\infty$

- من أجل $t_0=\frac{1}{2}$ نجد أصغر مسافة AM هي $\sqrt{\frac{35}{2}}$ لأن ($f(t)=\frac{35}{2}$ قيمة حدية صغرى لـ f)...0.25.
- بتعويض $t=\frac{1}{2}$ في في إحداثيات M نجد: $\mathrm{I}\left(-6;-\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)$ 0.25
- ج) بما أن الجملة $\begin{cases}2t-7=-6\\3t-8=-\frac{13}{2}\\t=\frac{1}{2}\end{cases}$ تقبل حلا وحيدا $t=\frac{1}{2}$ فإن $\mathrm{I}\in(D)$ 0.5
- و بما أن $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=0$ $\overrightarrow{A\mathrm{I}}\begin{pmatrix}3\\-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ فإن $\overrightarrow{A\mathrm{I}}\perp\vec{u}$ و النقطة I هي المسقط العمودي لـ:على(D)......0.5

د)لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D) فهو شعاع ناظمي للمستوي (Q).

و منه معادلة (Q) $2x+3y+z+31=0$ 0.5

التمرين الثالث:

$u_0=e$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ و $v_n=\ln u_n$.

1-أ مهما كان $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n\times\frac{1}{2}$ ....0.25.

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=1$..0.75

ب) $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ....0.25.

* $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

2-أ) لدينا: $P_n=u_0\times u_1\times.......\times u_n$

و بما أن $u_n = e^{v_n}$ فإن $P_n = e^{v_0+v_1+....+v_n} = e^{S_n}$ .... 0.5.

ب) $S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2-\frac{1}{2^n}$ 0.5

- عبارة P_n بدلالة n هي $P_n = e^{2-\frac{1}{2^n}}$ 0.5

ج) $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ و $\lim_{n\to+\infty} P_n = e^2$ .... 0.5+0.5.

التمرين الرابع:

(I) لدينا: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ مع $x \in]1;+\infty[$

1) بقراءة بيانية للمنحني (Γ) نجد المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين متمايزين 0.25

2) لدينا: $g(2)=0$ 0.25

* بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.87;2.88]$ و $g(2.87).g(2.88) < 0$ 0.25

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.87;2.88[$ ...0.25

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:... 0.75

x	1		2		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$	||	+ + +	0	- -	0	+ + +	

(II) لدينا: $f(x) = x - 3 + \frac{4\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$ مع $x \in]1;+\infty[$.

1) $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ: (C_f) 0.25

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

2-أ) بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] = 0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x-3$ هو مستقيم مقارب

مائل للمنحني (C_f) بجوار $(+\infty)$ 0.25

ب) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ و الملخصة في الجدول التالي...0.75

x	1		$1+e^{-\frac{5}{4}}$		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$	||	- - -	0	+ + +	
الوضعية	||	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3-أ) مهما كان $x \in]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ 0.25

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

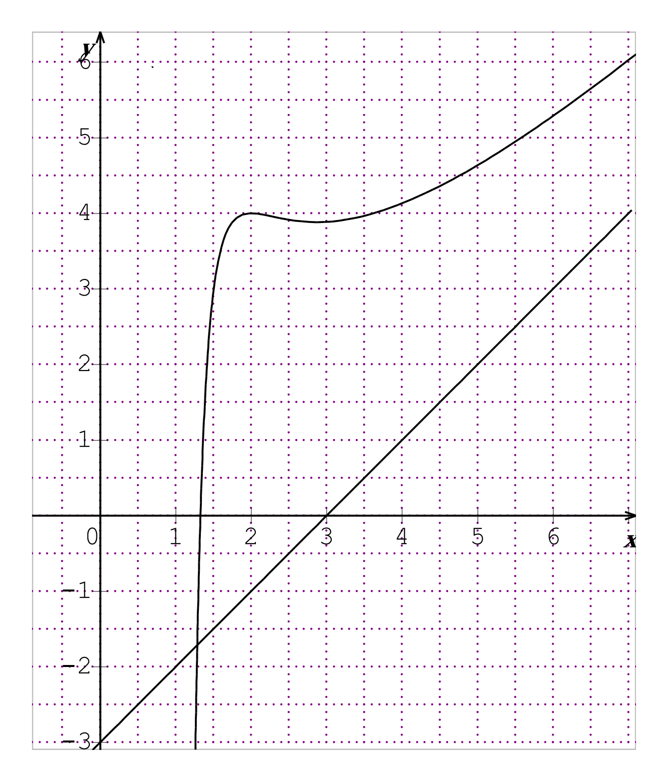
أي أن: f متزيدة تماما على كل من المجالين $]1;2]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$ 0.5

• جدول تغيرات f 0.25

x	1	2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	0	+
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	4	↘ $f(\alpha)$	↗	$+\infty$



4) رسم (Δ) و (C_f) 0.75



5) لدينا: $h(x)=\left[\ln(x-1)\right]^2$ مع $x\in]1;+\infty[$.

5-أ) $h'(x)=\dfrac{2\ln(x-1)}{x-1}$ 0.25

* الدالة الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدالة F المعرفة كما يلي:

$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3x+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln(x-1)+C$ 0.25

ب) $\int_2^5 f(x)dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2-3x+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln(x-1)\right]_2^5=\dfrac{3}{2}+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln 4$ 0.25

أي: $\int_2^5 f(x)dx=1.5+8\left[\ln 2\right]^2+10\ln 2$. و التفسير البياني لهذه النتيجة هي مساحة الحيز المستوي المحدد

بمنحنى الدالة f و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=2$ ، $x=5$ ، $y=0$ 0.25

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2015/2014

الدورة : ماي 2015

المـادة : الرياضيات

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 ساعة و نصف

تصحيح نموذجي للإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

لدينا: $u_0 = 9$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ و $v_n = u_n + 6$.

1-أ مهما كان n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{2}$ 0.5

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 15$... 0.5.

ب- $v_n = 15\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $u_n = 15\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$... 0.5

ج- $S_n = v_0 + ... + v_n = 30\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.. 0.5

$S'_n = u_0 + ... + u_n = 30\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6n - 6 = -30\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 6n + 24$................................ 0.5

2- لدينا: $w_n = \ln(v_n)$.

أ- مهما كان n من $\mathbb{N}$: $w_{n+1} = w_n - \ln 2$ 0.25

و منه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 2$ و حدها الأول $w_0 = \ln 15$............................ 0.5

ب- $S'' = w_0 + ... + w_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15 + \ln 15 - (\ln 2)n\right] = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15^2 - (\ln 2)n\right]$

$\lim_{n \to +\infty} S'' = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15^2 - (\ln 2)n\right] = -\infty$ 0.25

التمرين الثاني:

1- لدينا: $x^2 + (y-2) + z^2 = 3^2$ 0.5

ومنه (S) سطح كروي مركزه $w\ (0;2;0)$ و نصف قطره $R = 3$.................................. 0.5

2- أ) لدينا: $d(w;P) = 2$.

بما أن $R > 2$ فإن (S) و (Q) متقاطعان .... 0.5 2-ب) التقاطع هو الدائرة (C) التي

-نصف قطرها $r = \sqrt{R^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ و مركزها $H\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. حيث H المسقط العمودي لـ: w على (Q)...1

3- لدينا: الجملة $\begin{cases} x=2t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$ (I) مع $t\in\mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي $(\triangle)$.

أ- بما أن معادلة (P_m) محققة من أجل الجملة (I) فإن $(\triangle)\subset(P_m)$..0.5

ب- (P_m) مماس لـــ: (S) يكافئ $d(w;P_m)=3$. أي من أجل $m=0$......................................0.5

ج- لدينا: $\overrightarrow{n}_P\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{n}_{P_m}\begin{pmatrix}2m\\1-2m\\m\end{pmatrix}$.

$(P)\perp(P_m)$ يكافئ $\overrightarrow{n}_P.\overrightarrow{n}_{P_m}=0$.

وعليه نجد: $m=\frac{2}{9}$ 0.5

التمرين الثالث:

1- لدينا: $z_D=1-3i=\frac{5z_A+3z_B-6z_C}{2}$.

إذن D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;5),(B;3),(C;-6)\}$...0.5

2) $|z+2|=|z+1-i|$ يكافئ $MA=MC$ و منه مجموعة النقط M هي محور $[AC]$..............0.5

أو المستقيم الذي معادلته $2x+y+2=0$.

3-) لدينا: $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ 0.5

ومنه المثلث BCD قائم في B و متقايس الساقين..0.5

4-أ) $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ 0.5

4-ب): من 4-أ) نجد: $z_D-z_A=3e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)$.

أي أن D هي صورة C بالتشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته $-\frac{\pi}{2}$....................0.5

ج) $|z_A-z_{B'}|=12$ و منه $AB'=12$..0.5

* مساحة المثلث ABB' هي 24..0.5

5) العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$. أي : $z'=-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}$....................01

التمرين الرابع:

1-أ) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ 0.25

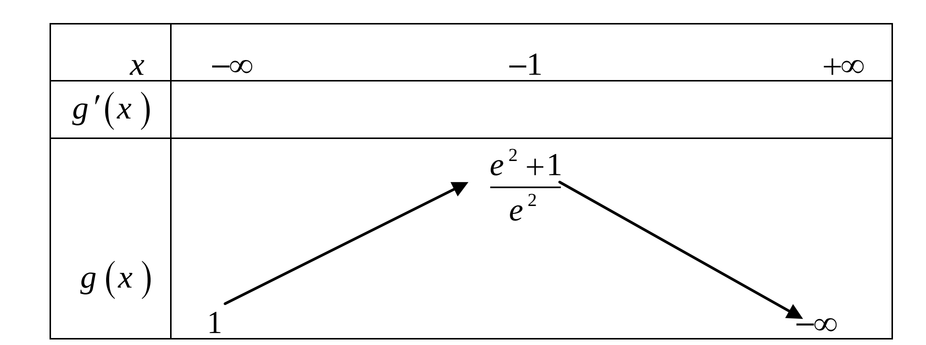
ب) دراسة اتجاه تغيرات g و تشكيل جدول التغيرات: 0.25

$g'(x)=(-4x-4)e^{2x}$ 0.25

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(x)$	+ + + 0 - - -

* من جدول الإشارة نستنتج أن: g متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و متناقصة تماما على $[-1;+\infty[$.........0.25

* جدول التغيرات:...0.25



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$	1 ↗	$\frac{e^2+1}{e^2}$	↘ $-\infty$



2) $g(0)=0$ 0.25

جدول إشارة $g(x)$ 0.5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	$+$	$+\ 0$	-	- -

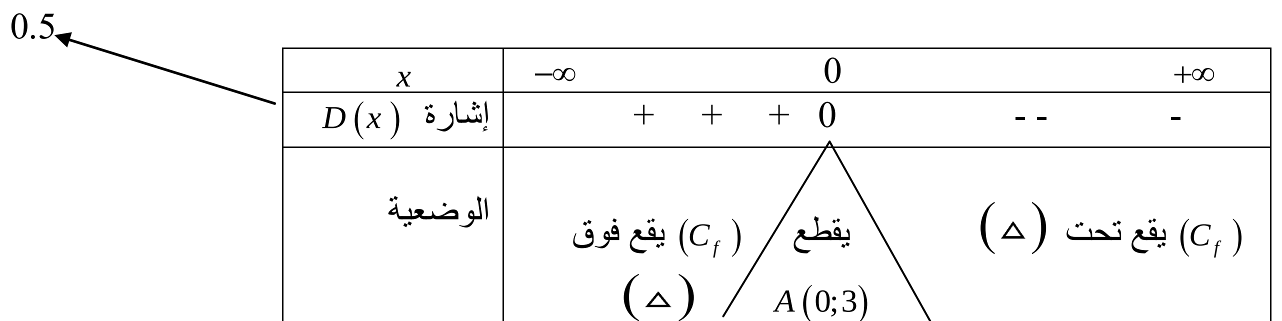
3) $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

أ) النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.5

ب) بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^{2x})=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x+3$ عند $(-\infty)$...0.5

4)لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $D(x)=f(x)-y=-xe^{2x}$ حسب الجدول:

0.5



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $D(x)$	$+\quad+\quad+$	0	- - -
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	يقطع $A(0;3)$	(C_f) يقع تحت (Δ)

5-أ) $f'(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$ 0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

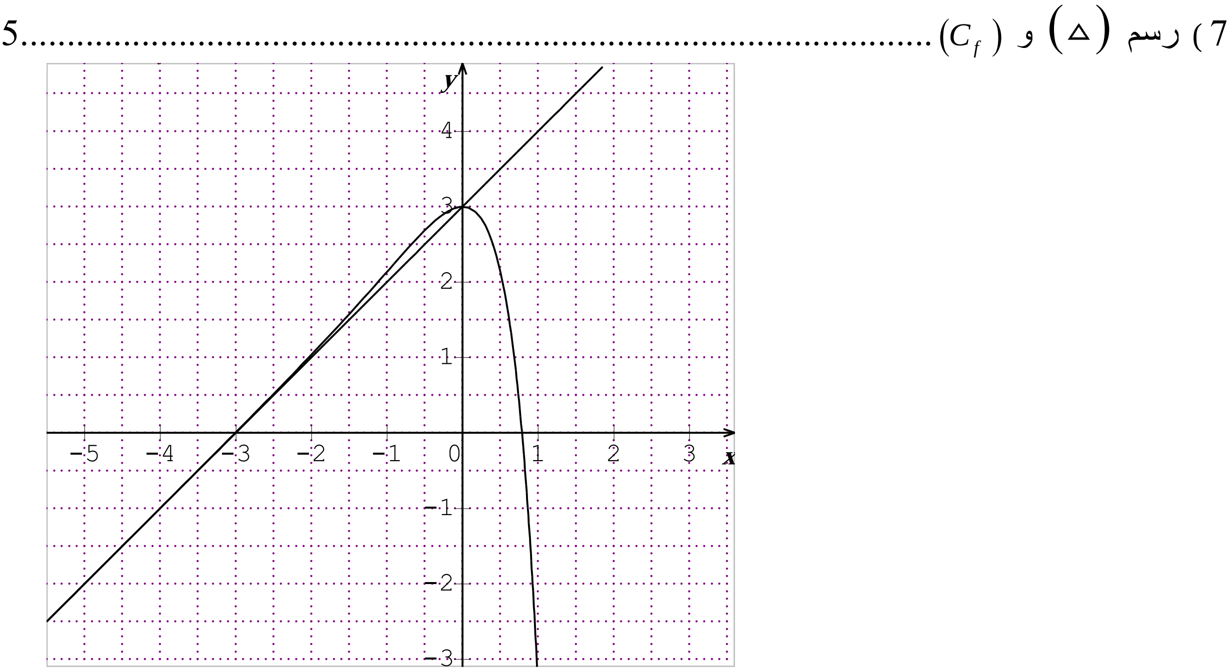
ب) f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$..0.25

جدول تغيرات f 0.5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ $+\infty$

6)بما أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[-3.5;-3]$ و $f(-3.5).f(-3)<0$ و بما أن f مستمرة و متناقصة تماما على $[0.5;1]$ و $f(0.5).f(1)<0$.
فإنه يوجد عددان حقيقيان α و β وحيدان من $]-3.5;-3[$ و $]0.5;1[$ على الترتيب بحيث: $f(\alpha)=0$ و $f(\beta)=0$ و ذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة..
وعليه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $A(\alpha;0)$ و $B(\beta;0)$.........................0.5

7) رسم (Δ) و (C_f)...0.75



8) $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) من أجل $x\neq 0$ لدينا : $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$..0.25

ب) $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ أي: $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}.g\left(\dfrac{1}{x}\right)$..0.25

جدول إشارة $h'(x)$...0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	- - - -	‖	+ + + +

من جدول إشارة $h'(x)$ نستنتج أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$..........0.25

جدول تغيرات h مع النهايات:...0.25

x	$-\infty$ 0	0 $+\infty$
$h'(x)$	- - -	+ +
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 3

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفــاع الـــوطنـــي — **السنة الدراسية:2016/2015**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **دورة ماي 2016**

دائرة الإستعمـــال و التحضير

مديريـــة مدارس أشبال الأمة

إمتحان البكــالوريــا الـتجــريبــي

الشعبة : علوم تجريبية

إختبار في مادة الرياضيات — **المدة: 3 ساعات ونصف**

الموضــوع الأول

التمرين الأوّل (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لنعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$ من الفضاء والمستوي (P) الذي معادلته $z=1$ والنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، و (Δ) هو المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-4-t \\ z=1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

و (S) هو السطح الكروي المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$.

من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير :

	( )	( )	(ج)	( ).
1) تمثيل وسيطي لـ (BC) هو:	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=-1+k \\ y=2+k \\ z=-3k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=1-2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=3 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$
2) المستقيمان (Δ) و (BC):	متوازيان تمامًا	منطبقان	متقاطعان	ليسا من نفس المستوي
3) المستقيم (BC)	محتوى في المستوى (P)	يقطع المستوي (P)	لا يوازي المستوي (P)	عمودي على المستوي (P)
4) إحداثيات النقطة D هي:	$(1,2,-1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,1)$	$(1,2,0)$
5) السطح الكروي (S) :	يشمل النقطة A	يقطعه المستوي (P)	لا يقطعه المستوي (P)	مركزه ينتمي إلى المستوي (P)

التمرين الثاني (05 نقاط):

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود P الذي متغيره z حيث: $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$.

ا) بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ لا تقبل حلاً تخيليًا صرفا .

ب) عيّن العددين الحقيقيين a ، b بحيث: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$.

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\|=2cm$.

نعتبر النقط $A;B;C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=1+i$.

أ) أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) أكتب z_B و z_C على الشكل الآسي.

ج) تحقق أن: $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2} z_C$.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحول B إلى C .

أ) عيّن θ زاوية الدوران R .

ب) أكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

4) لتكن (ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها النقطة I و (ϕ') صورتها بالدوران R .

أنشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ) و (ϕ') .

<u>التمرين الثالث (04 نقاط)</u>:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$:

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

ج) عيّن نهاية المتتالية (u_n).

2) لنعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية ، يطلب تحديد أساسها r وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) عيّن ثانية نهاية المتتالية (u_n).

<u>التمرين الرابع (07 نقاط)</u>:

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α بحيث: $\alpha \in]-0,74\ ;\ -0,73[$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$).

1) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المستقيم (d) الذي معادلته: $y = x$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $(+\infty)$.

3) أ) أثبت أنه من أجل كل x من: $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

ب) بيّن أن $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتيجة إلى 10^{-2}).

ج) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند I .

4) أرسم المستقيم (d) والمنحنى (C_f).

5) أ -عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $H: x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto (-2x-3)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب بـ: cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات المعرفة بالمعادلات: $y = x$ ، $x = \alpha$ و $x = 2$. (α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء الاول)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفــاع الـــوطـنـــي | **السنة الدراسية: 2016/2015**

أركان الجيش الوطني الشعبي | **دورة ماي 2016**

دائرة الإستعمـــال و التحضير

مديريـــة مدارس أشبال الأمة

إمتحان البكــالوريــا الـتجــريبــي

الشعبة :علوم تجريبية

إختبار في مادة الرياضيات | **المدة: 3 ساعات ونصف**

على المترشح ان يختار موضوعا واحدا من بين الموضوعين المقترحين

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α.

2) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟

3) أحسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $\pi_n = v_0 \times v_1 \times .... v_n$

أ/ بين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

التمرين الثاني(05 نقاط): المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$

1) أوجد العددين Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الاسي.

2) نعتبر النقط A , B , C ذات اللواحق: $Z_A = 2i$, $Z_B = \sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} - i$

أ - بين ان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC})$.

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

جـ - عين لاحقة Ω مركز الرباعي $OABC$

3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

ب- تحقق أن $S \circ S$ تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياس زاويته π.

جـ- نضع f التحويل النقطي المعرف بـ: $f = \underbrace{S \circ S \circ \cdots\cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$.

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون f تحاكيا نسبته سالبة.

4) k عدد حقيقي, (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $OM^2+AM^2+BM^2+CM^2=k$

أ - أثبت أن مجموعة النقط M من (E) تحقق العلاقة $\Omega M^2=\frac{k-8O\Omega^2}{4}$

ب -ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث (04.5 نقط): الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط: $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة له.

3- أ-عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G و يعامد المستوي (ABC)

جـ - نعتبر النقطة $E(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AE^2=AB^2$

د - عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V

4 - بين أن المستقيمين (AF) و (BC) متعامدين.

5- أ- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$

ب - عين الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (ABC)

التمرين الرابع (06 نقط):

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(0)=1$ ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

الجزء الأول

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا , **ب)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ) أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0 , **ب)** أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$, استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$, تحقق أن : $4,6\prec\alpha\prec4,7$

4) أكتب معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' ,استنتج اشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ,استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

جـ- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (D)

الجزء الثاني

1) n عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$ بدلالة n

2)استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ: cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و المستقيمين ذا المعادلتين $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}A(n)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـدفـاع الـوطنـي — السنة الدراسية:2016/2015

أركان الجيش الوطني الشعبي — دورة ماي 2016

دائرة الإستعمـال و التحضير

مديريـة مدارس أشبال الأمة

البكـالوريـا الـتجـريبـي

الشعبة : علوم تجريبية

التصحيح النموذجي لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات — الموضوع الأ

التمرين الأوّل (04 نقاط):

السؤال	الجواب	التعليل	التنقيط
1)	( )	الجملة: $\begin{cases}x=1+2k\\y=2k\\z=1\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) لأن إحداثيات B تحقق الجملة أي $t=0$: وإحداثيات C تحقق أيضا الجملة أي $t=1$: .	0.75
2)	( )	المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان لأن شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases}-3+t=1+2k\\-4-t=2k\\1=1\end{cases}$ أي: $\begin{cases}t=0\\k=-2\end{cases}$ و $M(-3;-4;1)\in(\Delta)\cap(BC)$	1
3)	( )	المستقيم (BC) محتوى في (P) لأن: $B\in(P)$ ، $1=1$ و $C\in(P)$ ، $1=1$.	0.75
4)	( )	إحداثيات النقطة D هي $(1,2,1)$ لأنها تحقق معادلة (P) أي $1=1$.	0.75
5)	( )	(P) يقطع السطح الكروي (S) لأن $\omega(1,2,2)$ هي مركز (S) ونصف قطرها $R=3$ و $d(\omega;P)=1$ و $1<R$.	0.75

التمرين الثاني (05 نقاط):

1) أ) لنفرض أن $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو ai حيث $a\in\mathbb{R}$.

وبالتالي نجد: $-ia^3+4a^2-6ai-4=0$ يكافئ: $\begin{cases}4a^2-4=0\\-a^3-6a=0\end{cases}$ وهذا مستحيل.

إذن: $P(z)=0$ لا تقبل حلا تخيليًا صرفًا..0.5

ب) $P(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$..0.5

ج) $P(z)=0$ يكافئ $z=2$ أو $z^2-2z+2=0$.......(I)..0.25

لنحل (I): $\Delta=(2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين مركبين مترافقين هما: $1+i, 1-i$..........................0.5

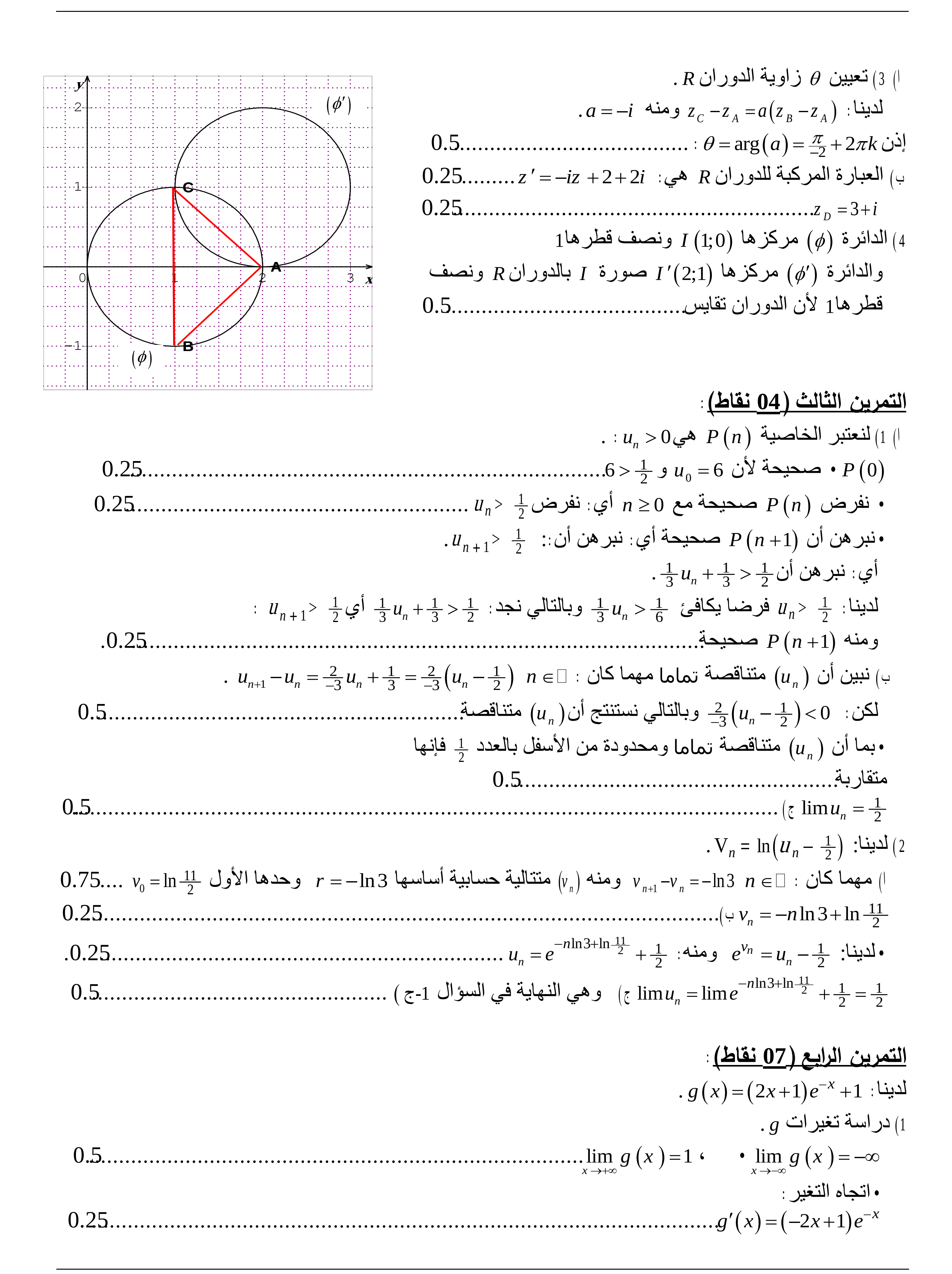
المعادلة $P(z)=0$ حلولها هي: $2, 1+i, 1-i$..0.25

2) أ) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-i$ ومنه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{-2}+2\pi k$ والمثلث ABC قائم في A..0.5

ب) $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$..0.5

ج) $z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437}$ ....

....0.5



أ) 3) تعيين θ زاوية الدوران R.

لدينا: $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه $a = -i$.

إذن: $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{-2} + 2\pi k$ 0.5

ب) العبارة المركبة للدوران R هي: $z' = -iz + 2 + 2i$ 0.25

$z_D = 3 + i$ 0.25

4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1

والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف قطرها 1 لأن الدوران تقايس..................................0.5

التمرين الثالث (04 نقاط):

أ) 1) لنعتبر الخاصية $P(n)$ هي: $u_n > 0$.

• $P(0)$ صحيحة لأن $u_0 = 6$ و $6 > \frac{1}{2}$..0.25

• نفرض $P(n)$ صحيحة مع $n \geq 0$ أي: نفرض $u_n > \frac{1}{2}$ 0.25

• نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: نبرهن أن: $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

أي: نبرهن أن $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$.

لدينا: $u_n > \frac{1}{2}$ فرضا يكافئ $\frac{1}{3}u_n > \frac{1}{6}$ وبالتالي نجد: $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{2}$:

ومنه $P(n+1)$ صحيحة..0.25.

ب) نبين أن (u_n) متناقصة تماما مهما كان $n \in$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{-3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{-3}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

لكن: $\frac{2}{-3}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) < 0$ وبالتالي نستنتج أن (u_n) متناقصة...0.5

• بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ فإنها متقاربة..0.5

ج) $\lim u_n = \frac{1}{2}$ 0.5

2) لدينا: $V_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

أ) مهما كان $n \in$: $v_{n+1} - v_n = -\ln 3$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ وحدها الأول $v_0 = \ln\frac{11}{2}$ 0.75

ب) $v_n = -n\ln 3 + \ln\frac{11}{2}$..0.25

• لدينا: $e^{v_n} = u_n - \frac{1}{2}$ ومنه: $u_n = e^{-n\ln 3 + \ln\frac{11}{2}} + \frac{1}{2}$ ....0.25.

ج) $\lim u_n = \lim e^{-n\ln 3 + \ln\frac{11}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ وهي النهاية في السؤال 1-ج) 0.5

التمرين الرابع (07 نقاط):

لدينا: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) دراسة تغيرات g.

• $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$..0.5

• اتجاه التغير:

$g'(x) = (-2x+1)e^{-x}$..0.25

جدول إشارة $g'(x)$ 0.25

x	$-\infty$ 0.5 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

من جدول إشارة $g'(x)$ نستنتج أن: g متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$........0.5

• جدول تغيرات g..0.25

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $\frac{2}{\sqrt{e}}+1$ ↘ 1

2) بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0.74;-0.73]$ و $g(-0.74)\times g(-0.73)<0$ فإنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-0.74;-0.73[$ 0.25

3) جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$..0.25

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

الجزء الثاني:

لدينا: $f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left[\left(\frac{-2x-3}{x}\right)e^{-x}+1\right]=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.5

2) بما أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y=x$ هو مقارب مائل لـ: (C_f) عند $+\infty$....0.25

3) أ) لدينا: $f'(x)=(2x+1)e^{-x}+1=g(x)$..0.25

• إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ كما هو مبين في جدول الإشارة التالي:...0.25

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$

من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج أن: f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.............0.5

• جدول تغيرات f..0.25

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$

ب) نعلم أن: $g(\alpha)=0$ يكافئ: $e^{\alpha}=-(2\alpha+1)$..0.25

لدينا كذلك $f(\alpha)=\frac{-(2\alpha+3)}{e^{\alpha}}+\alpha$ ، وبعد التعويض نجد: $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$..................................0.25

• استنتاج حصر للعدد: $f(\alpha)$ بتطبيق قواعد الحصر نجد: $-4,08 < f(\alpha) < -3,89$ ....0.25.

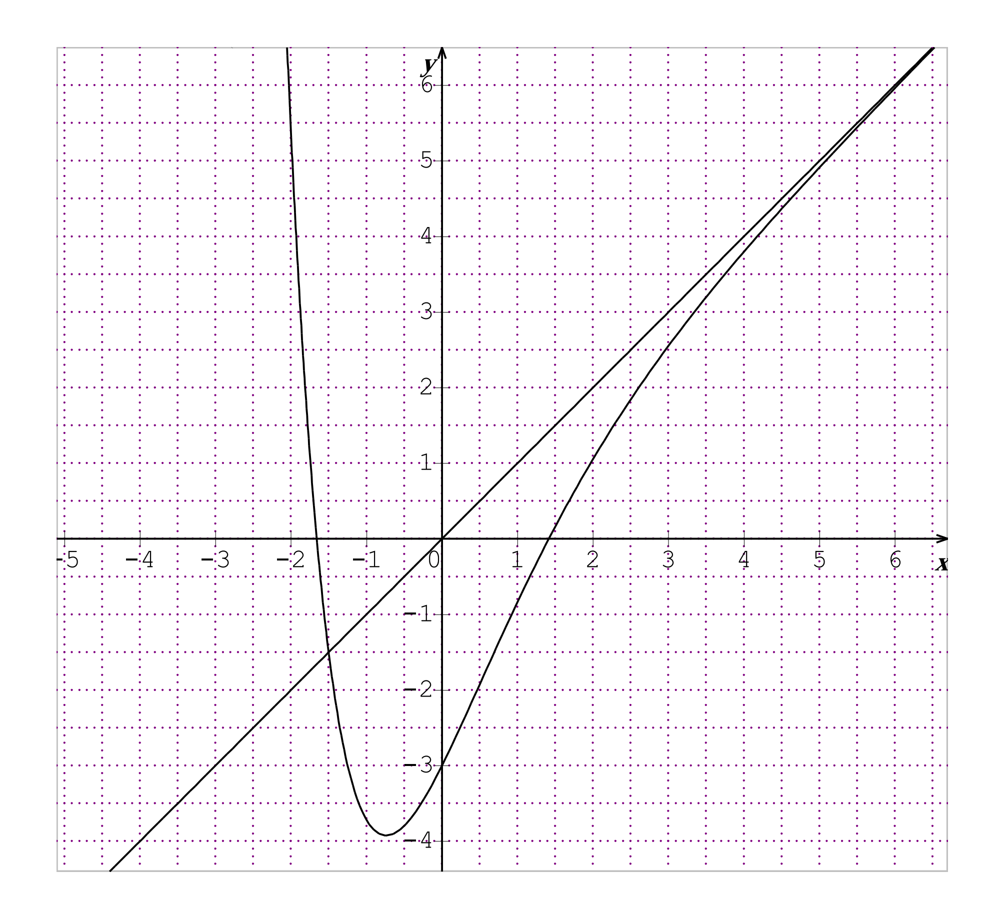
ج) لدينا: $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$ حسب الجدول التالي.........................0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ —

• بما أن $f''(x) = 0$ من أجل $x = \frac{1}{2}$ ويغير إشارته فإن (C_f) تقبل نقطة انعطاف $I\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{-4}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right)$........0.25

• معادلة المماس (T) عند النقطة I هي: $y = \left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)x - \frac{5}{\sqrt{e}}$ 0.25

4) رسم (d) و (C_f)..0.75



5) لدينا: $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ و $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

أ) تعيين a و b بحيث: H دالة أصلية لـ: h لدينا: $H'(x) = h(x)$ يكافئ: $(-ax-b+a)e^{-x} = (-2x-3)e^{-x}$.

ومنه: $a = 2$ و $b = 5$ وعليه فإن $H(x) = (2x+5)e^{-x}$...0.25

$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{2}(x - f(x))dx = \frac{9e^{\alpha} - e^{2}(2\alpha+5)}{e^{\alpha+2}}cm^2$ 0.25

إنتهى

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الــدفــاع الــوطنـــي — السنة الدراسية: 2016/2015

أركان الجيش الوطني الشعبي — دورة ماي 2016

دائرة الإستعمـــال و التحضير — الشعبة :علوم تجريبية

مديريـــة مدارس أشبال الأمة

الإجابة النموذجية للموضوع الثاني لإمتحان البكـالوريـا الـتجـريبـي

مادة الرياضيات — المدة: 3 ساعات ونصف

التمرين الأول:(04.5 نقاط)

-1- من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=2\alpha u_{n+1}+3\alpha^2 u_n-3\alpha u_{n+1}$ — +0.5

$=-\alpha(u_{n+1}-3\alpha u_n)=-\alpha v_n$ — 0.25

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول $v_0=2-3\alpha$

-2- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=(2-3\alpha)(-\alpha)^n$ — 0.25

و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ لأن $(-1\prec\alpha\prec1$ و $\alpha\neq0)$ ومنه (V_n) متقاربة — 0.25 — 0.25

-3- $S_n=v_0+v_1+......+v_n=\dfrac{2-3\alpha}{1+\alpha}\left(1-(-\alpha)^{n+1}\right)$ — 0.25

-4- $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{3}{4}$ معناه $\dfrac{2-3\alpha}{1+\alpha}=\dfrac{3}{4}$ أي $\alpha=\dfrac{1}{3}$ — 0.25

$S_n=v_0+v_1+......+v_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots(u_{n+1}-u_n)$

$=u_{n+1}-u_0=\dfrac{3}{4}\left[1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ — 0.25 — 0.25

معناه $u_{n+1}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n=\dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{7}{4}$ أي (u_n) متقاربة — +0.25 — 0.25 — +0.25

-5/أ- $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n=v_0\times v_1\times.........v_n$ — 0.25

$=3\times3\left(\dfrac{1}{3}\right)\times.........3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ — 0.25

$=3^{n+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-(n+1)}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$ — 0.25

ب/ $\pi_n\le3^{-44}$ معناه $3^{-\frac{n^2-n-2}{2}}\le3^{-44}$ معناه $(n-10)(n+9)\ge0$ و n عدد طبيعي نجد $n\ge10$ ومنه أصغر عدد طبيعي هو $n=10$ — 0.5

التمرين الثاني: (05 نقاط)

-1-نضع $z=x+iy$; z جذر تربيعي لـ L معناه $\begin{cases}x^2-y^2=2\\x^2+y^2=4\\xy=-\sqrt{3}\end{cases}$ — 0.25

نجد : $Z_1=\sqrt{3}-i$ و $Z_2=-\sqrt{3}+i$

$z_1=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $\quad z_2=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ — 0.25

-2- $z_B-z_A=\sqrt{3}-i=z_C-z_O$ اذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ — 0.25

0.5

$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC})=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_O}\right)=\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i}\right)=\arg\left(-\sqrt{3}i\right)$ — 0.25

$=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ب - بما أن $OB\neq AC$ فان $OABC$ معين — 0.25

جـ- $z_\Omega=\dfrac{z_B+z_O}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ — 0.25

3) $\begin{cases}z_O=\alpha Z_A+\beta\\z_B=\alpha Z_C+\beta\end{cases}$ نجد $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ و $\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ — 0.5

ومنه S هو التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z الى النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}iZ+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ — 0.25

نسبته $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة Ω — 0.75

ب- SoS تشابه مباشر نسبته $\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زاويته — 0.5

$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$

جـ- يكون f تحاكيا نسبته سالبة.اذا كانت زاويته $\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

أي أن $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$ — 0.25

4-/أ $OM^2+AM^2+BM^2+CM^2=k$ تكافئ

$4\Omega M^2+2O\Omega^2+2\left(3O\Omega^2\right)=k$ ومنه $\Omega M^2=\dfrac{k-8O\Omega^2}{4}$ — 0.5

ب-لدينا $O\Omega^2=1$ ومنه اذا كان $k\prec8$ فان $(E)=\varnothing$

اذا كان $k=8$ فان $(E)=\{\Omega\}$ — 0.75.

اذا كان $k\succ8$: (E) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $\dfrac{\sqrt{k-8}}{2}$

التمرين الثالث:(04.5نقاط)

-1- لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ أي : — 0.75

$AB=AC=BC=3\sqrt{2}$ ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع

-2- $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) — 0.25

$x+y-z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC) — 0.25

-3/أ. $G\left(\dfrac{3+3+0}{3},\dfrac{2+5+5}{3},\dfrac{1+4+1}{3}\right)$ اذن $G(2,4,2)-$ — 0.25

ب- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases}x=t+2\\y=t+4\;;t\in R\\z=-t+2\end{cases}$. — 0.5

4/.معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي :

جـ- $AE^2=AB^2$ معناه $(2+t-3)^2+(4+t-2)^2+(2-t-1)^2=12$ — 0.25

ومنه نجد $t=2$ أو $t=-2$

د-من أجل $t=2$ نجد E منطبقة على F أي $AF=AB=AC=BC$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}\neq 0$ اذن $FABC$ رباعي وجوه منتظم. — 0.25

مساحة المثلث ABC : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AA'=\frac{9\sqrt{6}}{4}u\cdot a$ — 0.5

حيث A' منتصف القطعة $[BC]$ ومنه $V_{FABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot FG$

لأن G هي المسقط العمودي لـ F على للمستوي (ABC) اذن

$$V_{FABC}=\frac{9\sqrt{2}}{2}u\cdot v$$

0.25

-4 $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ومنه

$(AF)\perp(BC)$ — 0.25

5- أ- $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$ معناه $MI=3$ حيث I منتصف القطعة $[GF]$ ومنه (S) هي سطح الكرة التي مركزها $I(3;5;1)$ ونصف قطرها 3 — 0.25

0.25

ب-بما أن $d(I,(ABC))=\frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}\prec 3$ فان (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة. — 0.25

0.25

التمرين الرابع(06 نقاط) :

0.25

1-أ/ $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ ومنه f مستمرة عند 0 و (C_f) يقبل نقطة توقف — 0.25

ب- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

2-أ/ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ اذن f قابلة للاشتقاق عند 0 — 0.25

وبما أن f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (كونها جداء و مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$) فان f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ — 0.25

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=2x(1-\ln x)$ و $f'(0)=0$ — 0.5

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1 ↗	$\frac{e^2}{2}+1$	↘ $-\infty$

0.5

تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]0;+\infty[$ ثم على المجال $[4,6;4,7]$ و $(f(4,6)=0,44;f(4,7)=-0,05)$

2- — 0.25

$$A(n)=4\left[\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)-(2x+\frac{1}{2})dx\right]=4\left[\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}-I_n\right]cm^2$$

$$\lim_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}$$

0.25 — $(D):y=2x+\frac{1}{2}$

5/ g معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: — 0.25

$g'(x)=f'(x)-2$

g' معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: — 0.25

$g''(x)=f''(x)=-\ln x$ ومنه g' تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 عند $x=1$ اذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\leq 0$ — 0.25

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0	↘

0.25

المنحنى يقع فوق المستقيم (D) في المجال $]0;1[$ وتحته في المجال $]1;+\infty[$ ويتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 اذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $I(1;\frac{5}{2})$. $f(6)\approx-9.5$ — 0.25 — 0.25

رسم المنحنى

0.5

0.5

1/- نضع : $U(x)=\ln x$ ومنه $U'(x)=\frac{1}{x}$

$V(x)=\frac{x^3}{3}$ ومنه $V'(x)=x^2$

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2dx$$

0.5

$$I_n=\frac{1}{3n^3}\ln(n)-\frac{1}{9}+\frac{1}{9n^3}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني — السنة الدراسية: 2017 – 2018

أركان الجيش الوطني الشعبي — بكالوريا تجريبي

دائرة الاستعمال و التحضير — المدة : 4 ساعات ونصف

مديرية مدارس أشبال الأمة

الشعبة: رياضيات — اختبار الرياضيات — دورة ماي 2018

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (5 ن)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب

أ) 1) أعط الكتابة الأسية للعدد z_B ثم للعدد z_C

2) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

3) أنشئ النقط A ، B و C ثم عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

4) عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $|z| = |z-2|$

ب) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z وتختلف عن النقطة A بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$ ثم أستنتج صورتي B و C بالتحويل T

2) G مركز ثقل المثلث OAB ، عين ثم أنشئ النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل T

3) أ) من أجل كل نقطة M تختلف عن A بين أن : $AM' = \dfrac{2 \times OM}{AM}$

ب) نفرض أن النقطة M تنتمي إلى المجموعة (E) ما هي مجموعة النقط M' ؟

التمرين الثاني (4 ن)

أ - (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها 4 .

1) أكتب الحد العام u_n بدلالة n

2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

3) إذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$

1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 3 \times 5 \times ..... \times (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

4) أستنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$ بدلالة n.

التمرين الثالث (4 ن)

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق $(C - B - A)$

نفرض أن كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط.

إذا علمت أن : - إحتمالات إصابة الرامي عمر المناطق $(C - B - A)$ على الترتيب هو $\left(\dfrac{7}{12}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{12}\right)$

- إحتمالات إصابة الرامي حمزة المناطق $(C - B - A)$ متساوية.

1) الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

أ - ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة (C) ؟

ب - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C - B - A)$ بهذا الترتيب ؟

جـ - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C - B - A)$ ؟

2) نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي عمر ضعف إحتمال اختيار الرامي حمزة.

أ - في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) ؟

ب - علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة (C)، ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي عمر ؟

التمرين الرابع (7 ن)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = (x+2) - 2\ln|2x+1|$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أثبت أن (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 ثم أكتب معادلته.

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.3 < \alpha < -1.2$

5) أرسم (T) و (D) ثم أنشئ المنحنى (C). (علما أن (C) لا يقبل نقطة إنعطاف)

6) أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto ln(2x+1)$ على المجال $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$

ب) λ عدد حقيقي حيث $-\frac{1}{2} \langle \lambda \le \frac{3}{2}$. أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\frac{3}{2}$ ، $x=\lambda$ و $y=0$.ثم أحسب $\lim_{\lambda \to -\frac{1}{2}} S(\lambda)$

7) ناقش بيانا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=-3x+m$.

8) g دالة عددية معرفة على $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ: $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-2\,ln|2x+1|$

- برهن أن المستقيم (K) الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

- إشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C) ثم أنشئه.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني — **السنة الدراسية: 2017 - 2018**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **بكالوريا تجريبي**

دائرة الاستعمال و التحضير — **المدة: 4 ساعات ونصف**

مديرية مدارس أشبال الأمة

الشعبة: رياضيات — **اختبار الرياضيات** — **دورة ماي 2018**

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 ن)

نعتبر العدد المركب $L(z)=\frac{z-i}{z-1}$ حيث $z\neq 1$

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $L(z)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ وليكن z_0 حل هذه المعادلة.

2) أكتب z_0 على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n: $z_0^{3n}=2^{\frac{9n}{2}}$.

3) عين العدد المركب z_1 بحيث $|L(z_1)|=1$ و $arg\left[L(z_1)\right]\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$ ثم بين أن $z_1^{2015}=2^{1007}(1-i)$.

4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z_0^{4n}+z_1^{4n}$ حقيقي.

II) المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B ، C ، D و M ذات اللواحق 1 ، i ، $1+i$ ، $-2-2i$ و z على الترتيب

1) * أكتب العدد $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

* أستنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول النقطة A إلى النقطة D يطلب تحديد عناصره المميزة .

2) لتكن (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $arg\left[L(z)\right]=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z$

* تحقق من أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S).

* أعط تفسيرا هندسيا لـ $arg\left[L(z)\right]$ ثم عين المجموعة (S).

التمرين الثاني (04 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(2,2,-1)$ ، $B(1,0,1)$

و المستوي (P) الذي معادلته : $2x+y+2z-13=0$.

1) أ) عين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها 3.

ب) حدد تقاطع المستوي (P) وسطح الكرة (S).

2) (D) المستقيم المار من النقطة A و العمودي على المستوي (P)

أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S).

3) (S_t) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق المعادلة الديكارتية

$$x^2+y^2+z^2-2tx-2tz+2t^2-9=0 \text{ حيث } t\in\mathbb{R}$$

أ) بين أن (S_t) معادلة سطح كرة مركزها H_t ونصف قطرها r.

ب) عين مجموعة النقط H_t عندما t يمسح $\mathbb{R}$.

جـ) أدرس حسب قيم t الوضع النسبي لـ (S_t) و (P).

التمرين الثالث (04 ن)

نعتبر الأعداد الطبيعية : $a=2n+1$ ، $b=4n+3$ و $c=2n+3$ حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2

1) تحقق من أن : $b=2a+1$ ثم أستنتج أن a و b أوليان فيما بينهما و $PGCD(a,b,c)=1$.

2) عين تبعا لقيم العدد n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c.

3) عين قيمة n بحيث يكون $PGCD(b,c)=3$ و $PPCM(b,c)=1305$.

4) أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a .

5) نفرض أن (a,b,c) هي إحداثيات نقطة D في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ)، ثم أستنتج معادلة المستوي (P).

التمرين الرابع (07 ن)

f دالة عددية معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ا) 1) برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ و فسر النتائج بيانيا.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$: $f''(x)=\dfrac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$ ثم أستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما.

4) $\alpha \in]0,+\infty[$ ، A نقطة من (C) فاصلتها α و (T_α) المماس للمنحني (C) في A.

°1) بين أنّ (T_α) يمّر بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.

°2) أستنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمرّان بالمبدأ O ثم عيّن معادلة كل من (T_a) و (T_b).

5) أرسم المماسين (T_a) ، (T_b) ثمّ إنشئ المنحنى (C) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x)=mx$.

II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.

1) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_1=1-\frac{3}{e^2}$.

2) بإستعمال المكاملة بالتجزئة برهن أن : $I_{n+1}=\frac{-2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$ حيث $n\geq 1$

3) أستنتج القيمة المضبوطة لــ I_2 و فسر النتيجة هندسيا.

بالتوفيق ...

التَصْحِيحُ النموذجي للبكالُوريا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

أ)1) إعطاء الكتابة الأسية لـ z_B ثم z_C : --

لدينا : $z_B = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و : $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) بيان أن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها :---------------

نلاحظ أنّ : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ ، أي : $OA = OB = OC = 2$ ، و منه فإن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O وَ نصف قطرها 2 .

3) إنشاء النقط $A;B;C$ ، ثم تعيين طبيعة الرباعي $OBAC$: --

أنظر الشكل المقابل .

لدينا : $OB = OC$ ، و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ ، أي : $OB = OC = 2$ و $z_B = z_A - z_C$

و منه فإنّ الرباعي $OBAC$ هو **معيّن .** (يمكن إستعمال خواص أخرى) .

$z_C = 2+\sqrt{3}-i$ ، إذن C هي صورة B بالدوران r .

ج) تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط M حيث $|z| = |z-2|$:--------------

لدينا : $|z| = |z-2|$ معناه : $|z - z_O| = |z - z_A|$ ، أي : $OM = AM$ ،

و منه مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[OA]$.

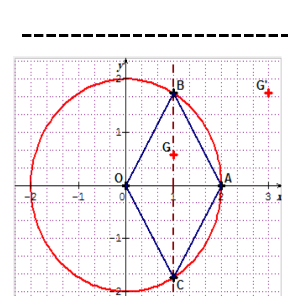
الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

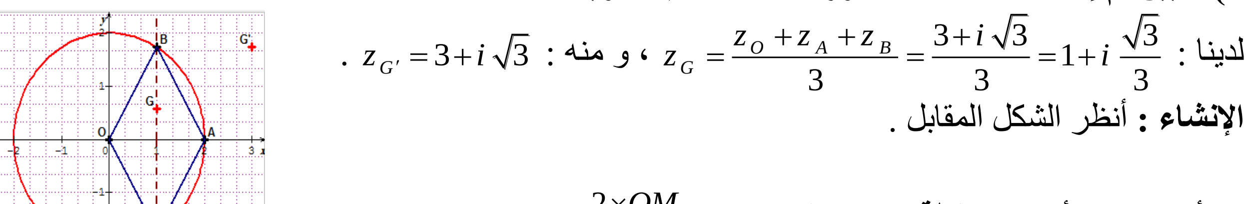
ب) 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \frac{-4}{z-2}$ **، ثم استنتاج صورتي B و C بالتحويل** T : --------------------

لدينا : $z^2 - 2z + 4 = 0$ ، $\Delta = -12$ ، و منه : $\begin{cases} z_1 = \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1-\sqrt{3}i \\ z_2 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1+\sqrt{3}i \end{cases}$.

نلاحظ أنّ : $T(B) = B$ وَ $T(C) = C$.

2) تعيين ثم إنشاء النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل T : ---





لدينا : $z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3} = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، و منه : $z_{G'} = 3+i\sqrt{3}$.

الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

3) أ) بيان من أجل كل نقطة M تختلف عن A $AM' = \frac{2\times OM}{AM}$:------------

لدينا : $z' = \frac{-4}{z-2}$ ، أي : $z'-2 = \frac{-4}{z-2} - 2$ ، و منه : $z'-2 = \frac{-2z}{z-2}$ ، أي : $|z'-2| = \frac{-2|z|}{|z-2|}$ ، و منه :

$|z' - z_A| = \frac{-2|z - z_O|}{|z - z_A|}$ ، أي : $AM' = \frac{2\times OM}{AM}$ ، و هو المطلوب .

ب) لدينا : $M \in (E)$ معناه أنّ : $OM = AM$ ، فينتج : $AM' = 2$.

و منه مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A وَ نصف قطرها 2 .

التنقيط	(المتتاليات العددية) تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)
	أ)1) كتابة الحد العام u_n بدلالة n --
	لدينا : $u_0=5$ وَ $r=4$ ، ومنه : $u_n=5+4n$.
	2) حساب قيمة المجموع S_n : --
	لدينا : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، أي : $S_n=\frac{n+1}{2}(10+4n)$ ، و منه : $S_n=(n+1)(5+2n)$.
	3): ---
	نضع الحد الأول هو u_p ، أي : $2025=\frac{5}{2}(u_p+u_{p+5})$ ، أي : $810=(2u_p+16)$ ، و منه : $u_p=397$.
	أي : $u_p=5+4p$ ، و منه : $397=5+4p$ ، أي : $p=98$ ، إذن الحد الأول من هذه الحدود هو : $u_{98}=397$
	ب) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=(2n+1)\times 2^{(4n+5)}$.
	1) تعيين تبعا لقيم n بواقي القسمة للعدد 2^n على 7 : --
	$2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$. أي بواقي القسمة الإقليدية 2^n على 7 هي : 1 ، 2 وَ 4 .
	2) تعيين قيم n حتى يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3 : ---
	لدينا : $v_n\equiv 3[7]$ ، أي : $(2n+1)\times 2^{(4n+5)}\equiv 3[7]$، أي : $4(2n+1)\times 2^n\equiv 3[7]$. نميز حالتين :
	إذا كان n مضاعفا لـ 3 ، أي : $n=3k$ ، أي: $24k+4\equiv 3[7]$ ، أي: $k=7L+3$، **ومنه :** $n=21L+9$.
	إذا كان n ليس مضاعفا لـ 3 ، أي: $n=3k+1$ ، و منه: $n=21L+1$. **أو** $n=3k+2$، أي : $n=21L+2$
	3) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$: ---------------------
	من أجل $n=0$ لدينا : $1=1$ ، و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
	نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$.
	نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$.
	لدينا: $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$ ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times(2n+3)$
	و منه : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$ ، أي المساواة صحيحة .
	إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$.
	4) إستنتاج قيمة الجداء P_n بدلالة n : --
	لدينا : $P_n=v_0\times v_1\times ...\times v_n$ ، أي : $P_n=(1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1))\times(2^5\times 2^9\times ...\times 2^{4n+5})$ ،
	أي : $P_n=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times 2^{(5+3+...+4n+5)}$ ، و منه : $P_n=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times 2^{(n+1)(5+2n)}$.

التنقيط	(الإحتمالات)	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)

1) أ) إحتمال أن يصيب المنطقة (C) في كل رمية : --

بما أنّ الرميات مستقلة ، فإنّ : $p_1 = \left(p(C)\right)^3 = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728}$.

ب) إحتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$ بهذا الترتيب : --

$p_2 = p(C) \times p(B) \times p(C) = \left(\frac{7}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{432}$.

ج) إحتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$: ---

$p_3 = 3! \times \left[p(C) \times p(B) \times p(C)\right] = 6 \times \left(\frac{7}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{42}{432} = \frac{7}{72}$.

2) أ) إحتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) : ---

لدينا إحتمال إختيار عمر هو ضعف إحتمال إختيار حمزة أي : $p(O) = \frac{2}{3}$ و $p(H) = \frac{1}{3}$.

إذن : $p(C) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{36} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

ب) حساب الإحتمال الشرطي $p_C(O)$: ---

$p_C(O) = \frac{p(C \cap O)}{p(C)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{18} \times 2 = \frac{7}{9}$.

التنقيط	(الدالة اللوغاريتمية)	تصحيح التمرين الرابع (07نقاط)

الجزء الأول:

1) حساب نهايات الدالة f ، ثم دراسة إتجاه تغيرها و تشكيل جدول تغيراتها : --------------------------

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2)\left[1 - 2\frac{\ln(2x+1)}{x+2}\right] = \lim_{x \to +\infty} (x+2)\left[1 - \frac{2\ln(2x+1)}{x+2} \times \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)}\right] = +\infty$.

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: $f'(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$.

جدول التغيرات : أنظر الشكل المقابل .

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	$+\infty$

2) إثبات أنّ (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 : ------

نضع : $f'(x) = -3$ ، أي : $2x-3 = -6x-3$ ، و منه : $x = 0$ ، إذن : (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، أي : $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، و منه : $(T): y = -3x + 2$.

3) الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمستقيم (D) : --

$f(x) - y = 2\left[1 - \ln|2x+1|\right]$ ، أي : $\ln|2x+1| = 1$ ، و سنلخص المناقشة في الجدول التالي :

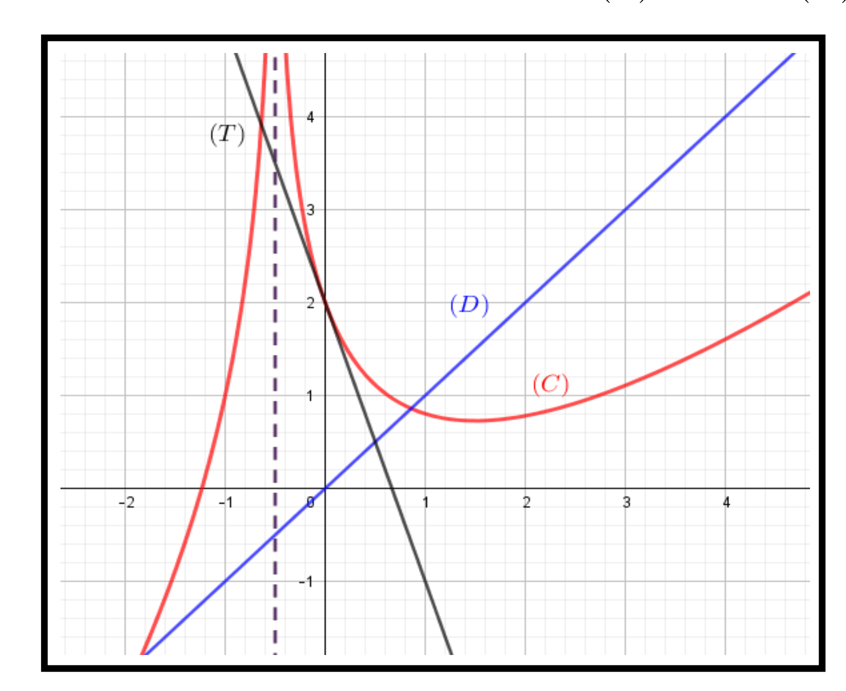
x	$-\infty$ $\frac{-e-1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{e-1}{2}$ $+\infty$			
$f(x)-y$	$-$	$+$	$+$	$-$
الوضعية	يقع (C) تحت (D)	يقع (C) فوق (D)	يقع (C) فوق (D)	يقع (C) تحت (D)

عند $x=\frac{-e-1}{2}$: (C) يقطع (D) ، و عند $x=\frac{e-1}{2}$: (C) يقطع (D)

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $-1{,}3<\alpha<1{,}2$: ----------------------------

f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-1{,}3;-1{,}2]$ و $f(-1{,}3)\times f(-1{,}2)<0$ ، و منه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α ، حيث $\alpha\in[-1{,}3;-1{,}2]$.

5) رسم (T) و (D) ، ثم إنشاء (C): --



6) أ) تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(2x+1)$ على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و التي تنعدم من أجل $x=0$: ----------

$\int\ln(2x+1)dx=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(2x+1)-x$.

ب) حساب مساحة الحيز: --

$S(\lambda)=2\ln4-\frac{3}{2}-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1)+\lambda$.

حساب : $\lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{2}} S(\lambda)$: $\lim_{x\xrightarrow{>}-\frac{1}{2}} 2\ln4-\frac{3}{2}-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1)+\lambda=-2+4\ln2$.

7) المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=-3x+m$: -------------------

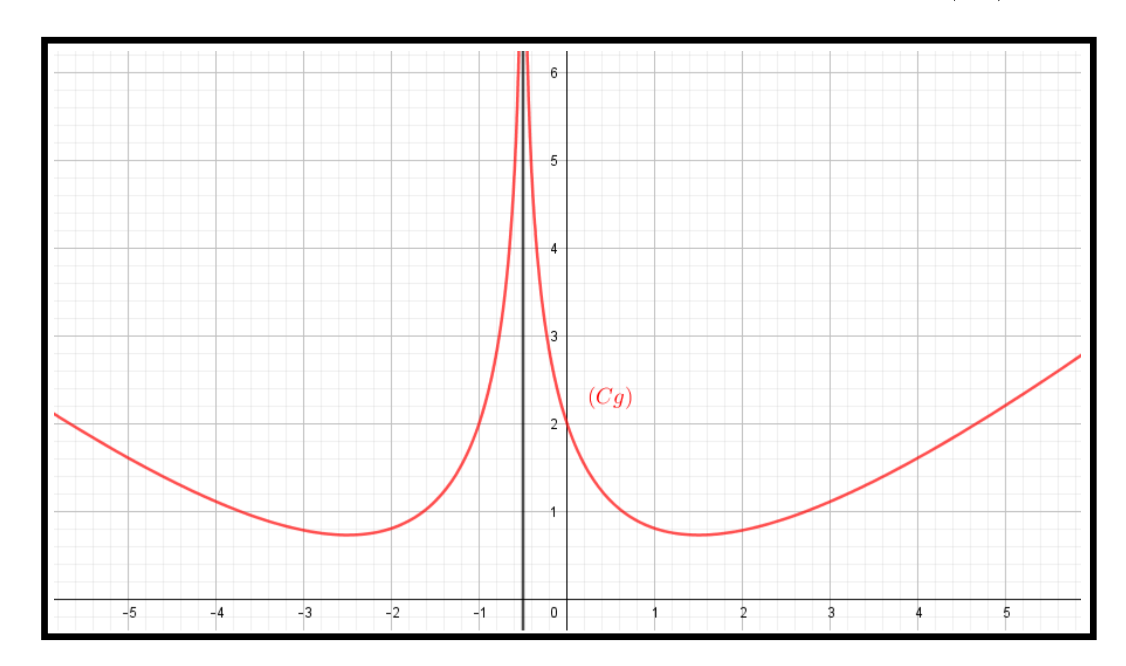
- لما : $m=2$ ، أي : $f(x)=-3x+2$ ، المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب .
- لما : $m<2$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
- لما : $m>2$ ، للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة .

8) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-2\ln|2x+1|$:-------------

- لدينا : D_g مجال متناظر بالنسبة إلى 0 ، وَ لدينا : $g(-1-x)=g(x)$ ، و منه فإنّ : $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (C_g) .

- المنحني (C_g) ينطبق على (C) في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، أماّ الجزء الآخر يرسم بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ في المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$.

إنشاء المنحني (C_g) : --



كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التَصْحِيحْ النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَاي 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

I) 1) **حل في مجموعة الأعداد المركبة** $\mathbb{C}$ **المعادلة** $L(z)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$:

$\frac{z-i}{z-1}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ ، أي : $z=\frac{-4+8i}{1+3i}$ ، أي : $z=\frac{20+20i}{10}$ ، و منه : $z_0=2+2i$.

2) **كتابة** z_0 **على الشكل الأسي ، ثم تعيين قيم العدد الطبيعي** n :

$z_0=2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_0^{3n}=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $\left(\left(2\sqrt{2}\right)^{3n}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}\right)=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $2^{3n+\frac{3n}{2}}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $2^{\frac{9n}{2}}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}=2^{\frac{9n}{2}}$ ،

ومنه : $e^{i\frac{3\pi n}{4}}=1$ ، أي : $\frac{\pi n}{4}\equiv 0[2\pi]$ ، أي : $\frac{\pi n}{4}=2k\pi$ ، أي : $\frac{n}{4}=2k$ ، و منه : $n=8k$.

3) **تعيين العدد المركب** z_1 **، ثم بيان أنّ :** $z_1^{2015}=2^{1007}(1-i)$:

لدينا : $|L(z_1)|=1$ وَ $\arg[L(z_1)]=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ، معناه أنّ : $L(z_1)=\frac{z_1-i}{z_1-1}=-i$ ، (يمكن إستعمال خواص الزوايا الموجهة) . و منه بعد الحساب نجد : $z_1=\frac{2+2i}{2}$ ، إذن : $z_1=1+i$.

لنبيّن أنّ : $z_1^{2015}=2^{1007}(1-i)$ ، لدينا : $z_1=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ، أي :

$z_1^{2015}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2015}=\left(\sqrt{2}\right)^{2015}e^{i\frac{2015\pi}{4}}=2^{1007}\times\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}=2^{1007}\times\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ ،

و منه : $z_1^{2015}=2^{1007}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{1007}(1-i)$.

4) **برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي** n **:** $z_0^{4n}+z_1^{4n}$ **حقيقي**

لدينا: $z_0^{4n}+z_1^{4n}=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}+\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}=e^{i\pi n}\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}+\left(\sqrt{2}\right)^{4n}\right]=\cos(\pi n)\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}+\left(\sqrt{2}\right)^{4n}\right]$

و بالتالي فإنّ : $z_0^{4n}+z_1^{4n}$ حقيقي .

II) 1) أ) **كتابة العدد** $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}$ **على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي :**

لدينا : $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=3-3i$ وَ $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب) لدينا : $\frac{CD}{CA}=3\sqrt{2}$ ، وَ $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، و منه يوجد S **التشابه المباشر** الذي مركزه C ، و نسبته $3\sqrt{2}$ ، و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

2) أ) **التحقق أنّ النقطة** C **تنتمي إلى المجموعة** (S) :

لدينا : $L(z)=\frac{z-i}{z-1}=-i$ ، أي : $L(z_C)=\frac{(1+i)-i}{(1+i)-1}=\frac{1}{i}=-i$ ، و منه : $C\in(S)$.

ب) لدينا : $\arg[L(z)]$ ، معناه : $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

و منه مجموعة النقط M هي **نصف دائرة** قطرها $[AB]$ و تشمل النقطة C باستثناء A و B .

التنقيط	(الهندسة الفضائية)	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

1) أ) **تعيين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) :** --

لدينا : (S) مركزها B و نصف قطرها 3 ، و منه : $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=3^2$.

ب) **تعيين تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S) :** --

نحسب : $d\left(B;(P)\right)=\frac{|2+2-13|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$ ، أي : $d\left(B;(P)\right)=3=r$ ، و منه (P) **يمس** (S) .

2) أ) **إعطاء تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :** --

لدينا : (D) يشمل النقطة A و عمودي على (P) ، أي : $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، أي :

$(D):\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=2+\lambda\\z=-1+2\lambda\end{cases}\;;\lambda\in\mathbb{R}$ هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

ب) **دراسة الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S) :** ---------------------------------------

بعد التعويض و التبسيط نجد : $9\lambda^2+4\lambda=0$ ، أي : $\lambda=0$ ، أو $\lambda=-\frac{4}{9}$ **.** و منه (D) يقطع (S) في **نقطتين**

3) أ) **بيان أن (S_t) سطح كرة مركزها H_t و نصف قطرها r :** --------------------------------------

لدينا : $(S):x^2+y^2+z^2-2tx-2tz+2t^2-9=0$ ، أي : $(S):(x-t)^2+y^2+(z-t)^2=3^2$.

و منه : (S) هي سطح كرة مركزها $H_t(t;0;t)$ ، و نصف قطرها 3 ، حيث : $\begin{cases}x=t\\y=0\;;\;t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$.

ب) مجموعة النقط M هي **المستقيم** الذي يشمل المبدأ و شعاع توجيهه $\vec{v}(1;0;1)$.

ج) **دراسة حسب قيم t الوضع النسبي لـ (S_t) و (P) :** ---

لدينا : $d\left(H_t;(P)\right)=\frac{|4t-13|}{3}$ ، الآن نناقش حسب قيم t :

- لما : $1<t<\frac{11}{2}$ ، فإنّ : (S_t) و (P) يتقاطعان وفق دائرة .
- لما : $t=\frac{11}{2}$ أو $t=1$ ، فإنّ : (S_t) يمسّ (P) .
- لما : $t\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{11}{2};+\infty\right[$ ، فإنّ : $(S_t)\cap(P)=\varnothing$.

التنقيط	(الحساب + الهندسة الفضائية)	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)

1) أ) **التحقق أنّ** $b=2a+1$: ---

لدينا : $\begin{cases}2a=4n+2\\b=4n+3\end{cases}$ ، بالطرح نجد : $b-2a=1$ ، و منه : $b=2a+1$ ، و هو المطلوب .

ب) **إستنتاج أن a و b أوليان فيما بينهما ، وَ** $PGCD(a;b;c)=1$: ---------------------------------

- لدينا : $b=2a+1$ ، أي : $b-2a=1$ ، و منه حسب مبرهنة **بيزو** فإنّ a **و** b أوّليان فيما بينهما .
- و منه : $PGCD(a;b)=1$ ، و عليه : $PGCD(a;b;c)=PGCD(1;c)=1$. و هو المطلوب .

2) **تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c :** -------------------------

لدينا : d/c وَ d/b ، إذن : $d/b-2c$ ، أي : $d/3$ ، و منه : $d/1$ ، أو $d/3$.

أي : لما n مضاعف لـ 3 فإنّ : $PGCD(b;c)=3$ ، و لما n ليس مضاعف لـ 3 فإنّ: $PGCD(b;c)=1$.

لدينا : $\begin{cases} c \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases}$ و ، أي : $\begin{cases} 2n+3 \equiv 0[3] \\ 4n+3 \equiv 0[3] \end{cases}$ و ، أي : $\begin{cases} 2n \equiv 0[3] \\ 4n \equiv 0[3] \end{cases}$ ، و منه : $n \equiv 0[3]$.

- إذا كان : $n = 3k$ ، فإنّ : $d = 3$.
- إذا كان : $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ ، فإنّ : $d = 1$.

3) تعيين قيم n : --

لدينا : $PGCD(b;c) = 3$ وَ $PPCM(b;c) = 1305$ ، أي : $bc = 3915$ ، و منه : $(4n+3)(2n+3) = 3915$

أي : $8n^2 + 18n - 3906 = 0$ ، إذن : $n = 21$.

4) كتابة العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a : ---

لدينا : $b^2 = 16n^2 + 24n + 9$ ، أي : $b^2 = 4(2n+1)^2 + 4(2n+1)^1 + (2n+1)^0$ ، و منه : $b^2 = \overline{444}^a$.

5) أ) بيان أنّ النقطة D تنتمي إلى (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي : -------------------------------

لدينا: $D(a;b;c)$ ، أي : $D(2n+1; 4n+3; 2n+3)$ ،ومنه D تنتمي للمستقيم : $(\Delta): \begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 4n+3 \; ; \; n \in \mathbb{R} \\ z = 2n+3 \end{cases}$.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (P) : --

-

لدينا : (P) يشمل O وَ $A(1;3;3)$ ، $B(3;7;5)$. $M(x;y;z)$ ، $M \in (P)$ معناه : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

و منه : $(P): \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 3\alpha + 7\beta \; ; \; \alpha;\beta \in \mathbb{R} \\ z = 3\alpha + 5\beta \end{cases}$.

إستنتاج معادلة ديكارتية لـ (P) : $(P): \begin{cases} 3x - y = 2\beta \\ y - z = 2\beta \end{cases}$ ، بالطرح نجد : $(P): 3x - 2y + z = 0$.

تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

I(1) برهان أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، **ثم حساب** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **و تفسير النتائج هندسيا :** ------------------------

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ ، و منه : $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$ ، و منه : $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها : ---

الدالة f قابلة للإشتقاق على : $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$.

و منه الإشارة من إشارة : $\ln x(2 - \ln x)$ ، و عليه سنلخص إتجاه التغيّر في الجدول التالي :

جدول التغيرات :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

3) بيان أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f''(x)=\frac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$**:** ---------------------------------

$f''(x)=\frac{\left(\frac{2-2\ln x}{x}\right)x^2-2x\left[\ln x\left(2-\ln x\right)\right]}{x^4}=\frac{x\left(2-2\ln x\right)-2x\left(-2\ln x-(\ln x)^2\right)}{x^4}$ ، و منه :

$f''(x)=\frac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$ ، و هو المطلوب .

نلاحظ أنّ المشتقة الثانية تنعدم و تغيّر إشارتها ، و عليه فإنّ المنحني (C) يقبل نقطتي إنعطاف هما :

$A\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};\frac{7-3\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right)$ ، $B\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\frac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}\right)$.

4) أ) بيان أنّ (T_α) **يمر بالمبدأ إذا وفقط إذا كان** $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ **:** ---------------------------------

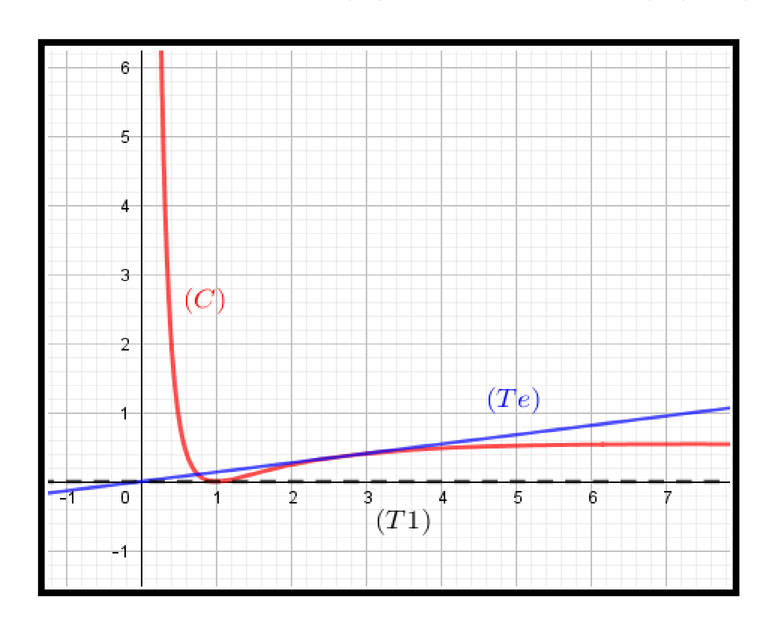
لدينا : $(T_\alpha):y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ، (T_α) يمر بالمبدأ معناه أنّ : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.

ب) إستنتاج وجود مماسين (T_a) **و** (T_b) **:** --

لدينا : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ ، معناه : $\alpha=1$ **أو** $\alpha=e$ **.** و منه يوجد مماسين يمران بالمبدأ O .

معادلتهما : $(T_1):y=0$ ، وَ $(T_e):y=\frac{1}{e^2}x$.

5) رسم المماسين (T_1) **و** (T_e) **، ثم إنشاء المنحني** (C)**:** ---



3) المناقشة البيانية حسب قيم m **حلول المعادلة** $f(x)=mx$ **:** ---------------------------------------

- لما $m=0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو : $x=1$.
- لما $0<m<\frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول .
- لما $m=\frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول أحدهم مضاعف .
- لما $m>\frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

I(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة نبين أن: $I_1=1-\frac{3}{e^2}$: ---

لدينا : $I_n=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$ ، أي : $I_1=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}$ ، أي : $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x^2}\to u(x)=-\frac{1}{x}\\ v(x)=\ln x\to v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$ ، و منه :

$I_1=-\frac{\ln x}{x}-\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}dx$ ، أي : $I_1=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}=1-\frac{3}{e^2}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، نبين أن : $I_{n+1}=\frac{-2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$ **حيث** $n\geq1$: ---------------------

لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$ ، أي : $\begin{cases}v'(x)=\frac{1}{x^2}\to v(x)=-\frac{1}{x}\\ u(x)=(\ln x)^{n+1}\to u'(x)=(n+1)(\ln x)^n\times\frac{1}{x}\end{cases}$.

لدينا : $n\geq1$ ، (بعد الحساب) نجد : $I_{n+1}=-\frac{2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$. و هو المطلوب

3) إستنتاج القيمة المضبوطة لـ I_2 ، و تفسير النتيجة هندسيا : ---------------------------------------

$I_2=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x^2}dx=-\frac{2^2}{e^2}+2I_1=-\frac{10+2e^2}{e^2}(u.a)$.

و منه : I_2 هي مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C) ، و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=1$ ، $x=e^2$

و المستقيم ذو المعادلة $x=0$.

<u>كتابة الأستاذ</u> : بلقاسم عبدالرزاق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني — **السنة الدراسية: 2017 - 2018**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **بكالوريا تجريبي**

دائرة الاستعمال و التحضير — **المدة: 3 ساعات ونصف**

مديرية مدارس أشبال الأمة

الشعبة: علوم تجريبية — **اختبار الرياضيات** — **دورة ماي 2018**

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $(z-2)\left[z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}\right]=0$

2) نعتبر النقط A ، B ، C من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=2$ ، $z_B=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=2+\sqrt{3}-i$

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC ثم أنشئ النقط A ، B ، C

ب) برهن أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\dfrac{-\pi}{6}$

جـ) أستنتج عمدة للعدد z_B ثم عين القيم المضبوطة لكل من $Cos\dfrac{\pi}{12}$ و $Sin\dfrac{\pi}{12}$ $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2=4+2\sqrt{3}\right]$

3) M نقطة من المستوي $(M\neq O)$ لاحقتها $z=ke^{i\theta}$ حيث $k\rangle 0$ و $\theta\in R$

M_1 صورة النقطة M بالدوران r و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

أ) أثبت أن z' لاحقة النقطة M' تساوي $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$

ب) * عين قيم θ التي تحقق $z'=z$

* أستنتج مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها $z'=z$

التمرين الثاني: (4 ن)

أ - (u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq n$

2) أستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $v_n=u_n-n+1$

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم أكتب v_n و u_n بدلالة n .

2) أحسب قيمة المجموع : $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+...+v_{n-1}^2$ بدلالة n.

3) أحسب قيمة المجموع : $K_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+...+(u_{n-1}-n+1)^2$ بدلالة n.

التمرين الثالث: (4 ن)

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد إسمه علي وإمرأة واحدة إسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

1) أحسب إحتمال كل من الأحداث التالية

A " تكوين لجنة تضم 3 رجال"

B " تكوين لجنة تضم رجلا وإمرأتين"

C " تكوين لجنة تضم علي"

D " تكوين لجنة تضم إما علي وإما فاطمة"

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله

ب) أحسب الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (7 ن)

أ) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^{x}-2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) * بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر $1.5 < \alpha < 1.6$

* عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

ب) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x-1}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) برهن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

2) بين أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند القيمة 0 ثم أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C) عند المبدأ O

3) أ) برهن أت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$

جـ) تحقق من أن : $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f

4) - احسب $f(x)+x^2$ واستنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ) الذي معادلته : $y=-x^2$

- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x^2=0$ وفسر النتيجة بيانيا

5) ارسم (Δ) و (Γ) ثم أنشئ المنحنى (C)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2017 - 2018
بكالوريا تجريبي
المدة: 3 ساعات ونصف

الشعبة: علوم تجريبية | اختبار الرياضيات | دورة ماي 2018

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 ن)

$P(z)$ كثير الحدود في C معرف بـ $P(z)=z^3-(2Sin\theta+iCos\theta)z^2+(1+iSin2\theta)z-iCos\theta$ ، $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

أ) 1) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2) عين العددين الحقيقيين α و β حيث $P(z)=(z-iCos\theta)(z^2+\alpha z+\beta)$ ثم حل في C المعادلة $P(z)=0$ حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث

3) أكتب بدلالة θ الشكل الأسي للأعداد z_0 ، z_1 و z_2 .

ب) نعتبر النقط A ، B ، C من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

1) علم النقط A ، B ، C ثم عين طبيعة المثلث ABC .

2) برهن أن المبدأ O مرجع الجملة $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي λ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $2MA^2+MB^2-MC^2=\lambda$

التمرين الثاني: (4 ن)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا $\frac{5}{6}$ لاعبين باليد اليمنى و $\frac{1}{6}$ لاعبين باليد اليسرى

إحتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

1) نختار لاعبا ونسمي الحادثين

G " لاعب باليد اليسرى "

S " اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

أ - أحسب إحتمال الحادث $G\cap S$

ب - أحسب إحتمال الحادث S

ج - أحسب إحتمال الحادث أن يكون اللاعب باليد اليمنى علما أنه وضع الكرة داخل الدلو

2) في هذا السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى أنه يرمي كرتين واحدة بعد الأخرى (بفرض الرميتين مستقلتين) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث: (4 ن)

لكل سؤال توجد إجابة واحدة فقط صحيحة حددها مع التعليل

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

أ) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء و التي تحقق: $(2x+y-z-1)^2+(x+y-z)^2=0$

المجموعة (Γ) هي : 1) مستقيم 2) مستوي 3) سطح كرة

ب) (D) و (D') مستقيمان معرفان وسيطيا بـ $(D):\begin{cases}x=1\\y=1+2k,k\in\mathbb{R}\\z=1+k\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=7-4\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\\z=2-\lambda\end{cases}$

(D) و (D') هما مستقيمان : 1) متوازيان 2) متقاطعان 3) ليسا من نفس المستوي

جـ) (S) سطح كرة مركزها $w(1,1,0)$ و نصف قطرها 2

تقاطع (S) مع (D) هو : 1) مجموعة خالية 2) نقطة 3) نقطتين

د) A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $MA^2-MB^2=0$ هي: 1) مستقيم 2) مستوي 3) سطح كرة

التمرين الرابع: (7 ن)

I) g دالة عددية معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=-x+\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) أستنتج إشارة $g(x)$. ثم بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ فإن $0<\ln(x+1)<x$.

II) f دالة عددية معرفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f فردية .

2) أحسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$

3) بين انه من أجل كل $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$ ثم شكل جدول تغيرات على المجال $]1,+\infty[$

4) برهن أن المستقيم (D) الذي معادلته: $y=x$ مقارب للمنحني (C) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) (لاحظ أن $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$ ، $x\in]1,+\infty[$)

5) أرسم المستقيم (D) ثم أنشئ المنحنى (C).

6) بإستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln5-6\ln3$

- أستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات : $y=x$ ، $x=2$ ، $x=4$.

III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}-\{0,1\}$ كما يلي: $u_n = f(n) - n$

1) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة

2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_2 + u_3 + ... + u_n$ بدلالة n.

3) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ و فإن $0 \langle u_n \langle \frac{2}{n-1}$ ثم عين $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

بالتوفيق ...

تصحيح مقترح للبكالوريا التجريبي لمدارس أشبال الأمة

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — دورة : ماي 2018

التَصْحِيحْ النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 01

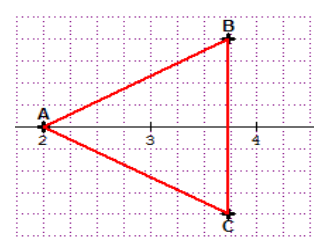
تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)\left[z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}\right]$ --------------------------------------

لدينا : $\begin{cases} z-2=0 \\ z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أو ، أي : $\begin{cases} z=2 \\ z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أو ، أي : $\Delta=4i^2$

أي : $\sqrt{\Delta}=2i$ ، و منه : $z_1=2$ ، $z_2=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_3=2+\sqrt{3}-i$.

2) أ) كتابة على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: ------------------------------ ------------------------



$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=1+\sqrt{3}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و

$\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، $AB=AC$ وَ $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ب) برهان أن C هي صورة B بالدوران r : --

لدينا : $r:z'=e^{-\frac{\pi}{6}i}z$ ، وَ $r(B)=C$ يكافئ $z_C=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ ، أي : $z_C=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(2+\sqrt{3}+i\right)$ ، و منه:

$z_C=2+\sqrt{3}-i$ ، إذن C هي صورة B بالدوران r .

ج) إستنتاج عمدة للعدد z_B و تعيين القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$: --------------------------

لدينا : $z_C=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ ، أي : $\overline{z_B}=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$. $\left(z_C=\overline{z_B}\right)$ ، ومنه: $\dfrac{\overline{z_B}}{z_B}=e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ، أي: $\arg\left(\overline{z_B}\right)-\arg\left(z_B\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

أي : $-2\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ ، و منه : $\arg\left(z_B\right)=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$ ، (لأنّ : $\mathrm{Re}\left(z_B\right)>0$ و $\mathrm{Im}\left(z_B\right)>0$) .

القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$: لدينا $z_B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ، نطابق الشكل الجبري

مع الشكل المثلثي نجد : $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$.

3) أ) إثبات أن z' تساوي $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$: --

لدينا: $r(M)=M'$ معناه $z_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)z$ أي : $z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$ ، أي : $z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(ke^{i\theta}\right)=ke^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

و بما أنّ : $z'=\overline{z_1}$ ، إذن : $z'=ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$.

ب)تعيين قيمة θ التي تحقق $z'=z$: ---

$z'=z$ معناه : $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=ke^{i\theta}$ ، أي : $\theta=\dfrac{\pi}{6}-\theta+2k\pi$ ، و منه : $\theta=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z = ke^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)}$ ، أي : $OM = k$ وَ $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ، نلاحظ أنّ B تنتمي إلى المجموعة ،

إذن : مجموعة النقط M من المستوي التي تكون من أجلها $z'=z$ هي **المستقيم** (OB) .

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية) — التنقيط

أ) 1) **برهان بالتراجع أنه من أجل كل** $n\in\mathbb{N} : u_n \geq n$ ---

نضع : $P(n): u_n \geq n$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ أي : $u_0 \geq 0$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n . أي نفرض أن $u_n \geq n$ صحيحة و نبين أن $u_{n+1} \geq n+1$.

- لدينا فرضا أنّ: $u_n \geq n$ ، أي : $3u_n - 2n + 3 \geq n+3$ ، و منه : $u_{n+1} \geq n+1$.

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) **إستنتاج** $\lim_{n\to+\infty} u_n$: ---

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ ، و نعلم أنّ : $u_n \geq n$ و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ، حسب النهايات بالمقارنة .

3) **بيان أنّ المتتالية** (u_n) **متزايدة تماما** : ---

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$:

لدينا: $u_{n+1}-u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3 > 0$. لأن : $(u_n - n \geq 0)$ ،

و منه فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب)1) **بيان أن** (v_n) **متتالية هندسية** : --

لدينا: $v_n = u_n - n + 1$ ، أي: $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3(u_n - n + 1)$: أي $v_{n+1} = 3v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=3$ ، و حدها الأول : $v_0 = 1$.

التعبير عن v_n **و** u_n **بدلالة** n :

- عبارة v_n : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = 3^n$.
- عبارة u_n : $u_n = v_n + n - 1$ ، أي: $u_n = 3^n + n - 1$.

2) **حساب المجموع** S_n: ---

$S_n = v_0^2 + \left(v_0^2 q^2\right) + ... + v_0^2\left(q^2\right)^{n-1}$ ، أي : $S_n = v_0^2\left[1 + \left(q^2\right) + \left(q^2\right)^2 + ... + \left(q^2\right)^{n-1}\right]$ ، أي :

$S_n = \left[1 + (9) + (9)^2 + ... + (9)^{n-1}\right]$ ، و منه : $S_n = \frac{9^n - 1}{8}$ **(متتالية هندسية أساسها 9 و حدها الأول 1)**

3) **حساب قيمة المجموع** K_n : --

لدينا : $v_n = u_n - n + 1$ ، أي : $v_n - 1 = u_n - n$. و منه : $K_n = (v_0 - 1)^2 + (v_1 - 1)^2 + ... + (v_n - 1)^2$ ،

و منه : $K_n = S_n + n - 3^n + 1$. (بعد الحساب و التبسيط)

تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الإحتمالات) — التنقيط

- أوّلا نحسب عدد الإمكانيات : $C_{12}^3 = 220$.

1) **حساب إحتمال الحوادث** : ---

- إحتمال تكوين لجنة تضم 3 رجال : $P(A) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$.
- إحتمال تكوين لجنة تضم رجلا و إمرأتين : $P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{8\times 6}{220} = \frac{48}{220}$.
- إحتمال تكوين لجنة تضم علي : $P(A) = \frac{C_1^1 \times C_{11}^2}{220} = \frac{1\times 55}{220} = \frac{55}{220}$.

- إحتمال تكوين لجنة تضم إمّاعلي وَ إمّا فاطمة : $P(D)=\frac{(C_1^1\times C_{10}^2)+(C_1^1\times C_{10}^2)}{220}=\frac{90}{220}$.

2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X ، ثم تعيين قانون الإحتمال : ---

$X=\{0;1;2;3\}$ ، هي قيم المتغير العشوائي X .

- قانون الإحتمال :

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}$ ، $P(X=1)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$ ، $P(X=2)=\frac{C_8^2\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}$ ،

$P(X=1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$.

ب) حساب الإنحراف المعياري لـ X : --

- **نحسب أوّلا الأمل الرياضي :** بعد الحساب نجد : $E(X)=2$.

ثانيا نحسب التباين : بعد الحساب نجد : $V(X)=0,54$.

ثالثا نحسب الإنحراف المعياري : $\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,54}=0,73$



تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة الأسية)	التنقيط

الجزء الأول:

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g : ---

الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=(1-x)e^x$. و منه الإشارة من إشارة $(1-x)$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-2$ وَ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

جدول التغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$0,7$	↘	-2

3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:-------------

$g(0)=0$ ، وَ الدالة g مستمرة و متناقصة تماما علـى $]1,5;1,6[$ و لدينا، $g(1,5)\times g(1,6)<0$ و بالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد حلا α من $]1,5;1,6[$ حيث $g(\alpha)=0$.

4) إشـــارة $g(x)$: --------------------------------

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني: لدينا : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} ;x\neq 0 \\ 0 ;x=0 \end{cases}$

1) بيان أن الدالة f مستمرة $\mathbb{R}$: ---

لدينا : $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ ، و منه f مستمرة عند 0 ، إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

ب) بيان أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 : ---

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1=f'(0)$ ، و منه الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$.

- **معادلة المماس** (Δ) : $(\Delta):y=x$.

3) أ): --

- **حساب :** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، و منه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي $(y=0)$.

حساب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب) بيان أنه من أجل كل $x \neq 0$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$: --

$$f'(x)=\frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2xe^x-2x-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x(2e^x-2-xe^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{x[(2-x)e^x-2]}{(e^x-1)^2}=\frac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ج) --

التحقق أنّ $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$: $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{e^\alpha-1}$ ، لدينا : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(2-\alpha)e^\alpha-2=0$ ، أي :

$e^\alpha=\frac{2}{2-\alpha}$ ، إذن : $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{\frac{2}{2-\alpha}-1}=\frac{\alpha^2}{\frac{2-2+\alpha}{2-\alpha}}=\frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha}=\alpha(2-\alpha)$.

حصر $f(\alpha)$: $0,6<f(\alpha)<0,8$.

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها : ---

نلخص إشـــــارة $f'(x)$ في الجدول المقابل :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 +	0	−

- جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 +	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$0,7$	↘ 0

ج) حساب : $f(x)+x^2$ ، واستنتاج وضعية (C) بالنسبة للمنحنى (Γ) الذي معادلته $y=-x^2$: ---------------------------------

لدينا : $f(x)+x^2=\frac{x^2}{e^x-1}+x^2=\frac{x^2+x^2e^x-x^2}{e^x-1}=\frac{x^2e^x}{e^x-1}$.

الوضعية: نلاحظ أن الإشارة من إشارة (e^x-1) .

و عليه نلخص الوضعية في الجدول التالي :

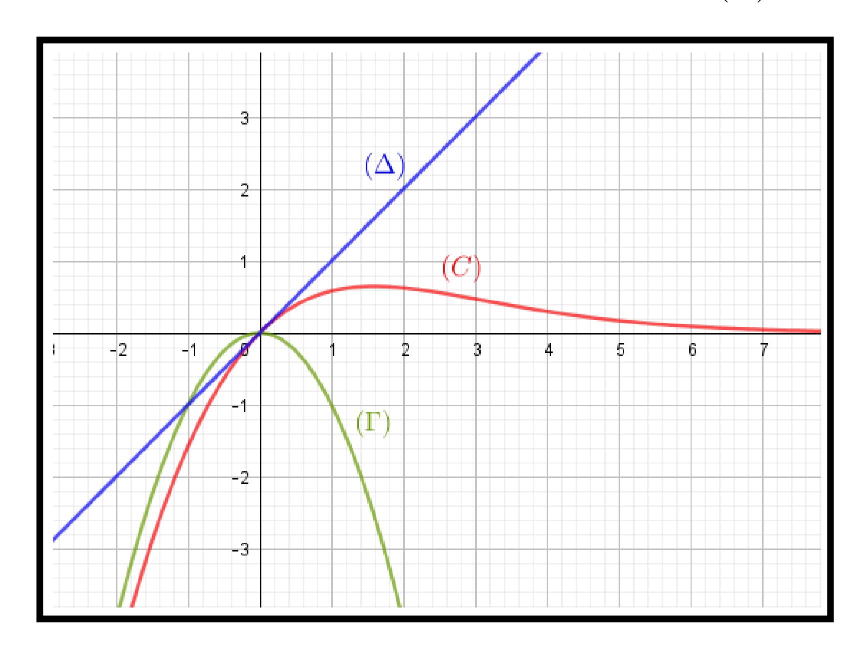
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)+x^2$	−	0	+
الوضعية	(C) يقع تحت (Γ)	يقطع	(C) يقع فوق (Γ)

- **بيان أن** $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x^2=0$ **و تفسره هندسيا :**

$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x^2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-1}=0$ ،

التفسير الهندسي : المنحنى (C) و (Γ) متقاربان عند $-\infty$.

5) رسم Δ و (Γ) ثم إنشاء (C) : --



6) المناقشة البيانية ، لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$: ----------------------------------

لدينا : $f(x)=f(m)$ ، لنضع $f(m)=M$:

- لما $M=f(\alpha)$ ، أي : $m=\alpha$ ، و منه للمعادلة حل مضاعف هو $x=\alpha$.

- لما $M\in]0;f(\alpha)[$ ، أي : $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ ، و منه للمعادلة حلان موجبان .

لما $M=0$ ، أي : $m=0$ ، و منه المعادلة تقبل حلا معدوما .

لما $M\in]-\infty;0[$ ، أي : $m\in]-\infty;0[$ ، و منه المعادلة تقبل حلا سالبا .

كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التَصْحِيحْ النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

أ) 1) **بيان أنّ المعادلة** $P(z)=0$ **تقبل حلا تخيليا صرفا :** --

نضع : $z=y_0 i$ ، و لدينا : $P(z)=0$ ، و منه : $P(y_0 i)=0$ ، معناه : $\begin{cases}(2\sin\theta)y_0^{\,2}-y_0\sin 2\theta=0\\ -y_0^3+y_0^2\cos\theta-\cos\theta=0\end{cases}$

و منه : $y_0=\cos\theta$ ، إذن : $z=i\cos\theta$.

2) **تعيين العددين الحقيقيين** α **و** β **:** ---

بعد النشر و التبسيط و استعمال المطابقة نجد : $\alpha=-2\cos\theta$ و $\beta=0$.

و منه : $P(z)=(z-i\cos\theta)(z^2-2\sin\theta)$.

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ **:** أي : $z_0=i\cos\theta$ ، $z_1=\sin\theta-i\cos\theta$ ، $z_2=\sin\theta+i\cos\theta$.

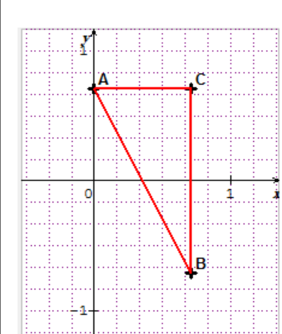
3) **كتابة بدلالة** θ **الشكل الأسي للأعداد** $z_0;z_1;z_2$: ---

لدينا : $z_0=\cos\theta e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، وَ $z_1=\sin\theta-i\cos\theta=-i(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ ،

و $z_2=\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

ب) 1) **تعليم النقط** $A;B;C$ ، **ثم تعيين طبيعة المثلث** ABC : ---------------------------------------

نلاحظ أنّ المثلث ABC قائم في C .



2) **حساب** z_O : $z_O=\dfrac{2z_A+z_B-z_C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}=0$

ومنه المبدأ O هو مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$.

3) **المناقشة حسب قيم الوسيط** λ مجموعة النقط M : -------------------------

لدينا : O هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$ ، وَ $2MA^2+MB^2+MC^2=\lambda$

أي : $2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\lambda$ ، و منه :

$OM^2=\dfrac{\lambda-1}{2}$ ، الآن نناقش حسب قيم λ :

- إذا كان $\lambda<1$: مجموعة النقط هي مجموعة خالية .
- إذا كان $\lambda=1$: مجموعة النقط هي النقطة O .
- إذا كان $\lambda>1$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها O وَ نصف قطرها $r=\sqrt{\dfrac{\lambda-1}{2}}$.

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الإحتمالات)	التنقيط

1) نرمز لليد اليمنى بـ D وَ نرمز لليد اليسرى بـ G : ---

أنظر شجرة الإحتمالات في الأسفل .... (لتسهيل الحل) .

أ) إحتمال الحادث $G\cap S$: $p(G\cap S)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.

ب) إحتمال الحادث S : $p(S)=p(G\cap S)+p(D\cap S)=\dfrac{1}{12}+\left(\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{24}$.

ج) حساب الإحتمال الشرطي $p_S(D)$: $p_S(D)=\dfrac{p(D\cap S)}{p(S)}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{5}{7}$.

2) أ) تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ، ثم تعريف قانون إحتماله : -----------------------------

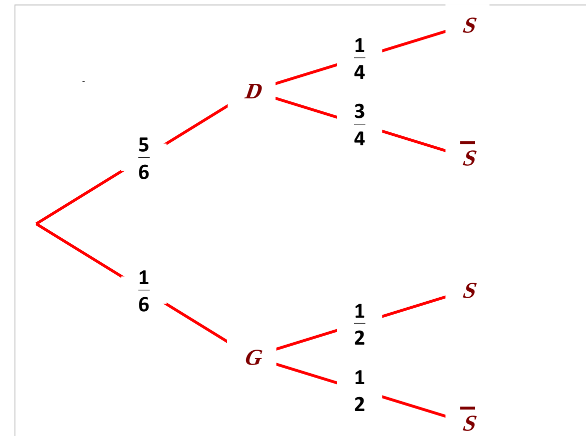
- قيم المتغيّر العشوائي X هي : $X=\{0;1;2\}$.

- تعريف قانون الإحتمال :

$p(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ ، $p(X=1)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{16}$ ، $p(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

ب) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X : ---

$E(X)=\frac{(9\times0)+(6\times1)+(1\times2)}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.



تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

تحديد الإجابة الصحيحة مع التعليل :

أ) الإجابة الصحيحة هي رقم (1) لأنّ : لدينا $(2x+y-z-1)^2+(x+y-z)^2=0$ معناه **:**

$\begin{cases}(P):2x+y-z-1=0\\(P'):x+y-z=0\end{cases}$ و ، أي : $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}$ و منه $\overrightarrow{n_{(P)}}$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه مجموعة النقط هي مستقيم .

ب) الإجابة الصحيحة هي رقم (3) لأنّ : لدينا $\overrightarrow{n_{(D)}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{n_{(D')}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ، $\frac{2}{-4}\neq\frac{0}{2}$ ، إذن : $\overrightarrow{n_{(D)}}$ و $\overrightarrow{n_{(D')}}$ غير مرتبطين خطيا ، و لدينا : $\begin{cases}1=3-2\lambda\\1+2k=7-4\lambda\\1+k=2-\lambda\end{cases}$ معناه : $\begin{cases}\lambda=1\\k=1\\k=0\end{cases}$ مستحيل ، إذن : (D) و (D') ليسا من نفس المستوي .

ج) الإجابة الصحيحة هي رقم (3) لأنّ : لدينا $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. بعد التعويض و الحساب نجد : $5k^2+2k-3=0$ ، إذن : $k=-1$ أو $k=\frac{3}{5}$ ، أي أنّ : التقاطع هو نقطتين M_1 وَ M_2 حيث :

$(S)\cap(D)=\left\{M_1(1;-1;0);M_2\left(1;\frac{11}{5};\frac{8}{5}\right)\right\}$.

د) الإجابة الصحيحة هي رقم (2) لأنّ : لدينا $MA^2-MB^2=0$ ، أي : $\overrightarrow{MA}^2-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2=0$ ، ومنه : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\frac{AB^2}{2}$ ، إذن مجموعة النقط M من الفضاء هي مستوى .

تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

الجزء الأول:

I(1) **دراسة تغيرات الدالة** g **:** --

الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=-\dfrac{x}{x+1}$. و منه من أجل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)\le 0$

$g(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

جدول التغيرات الدالة g **:**

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$

2) **إستنتاج إشارة** $g(x)$**:** ------------------------------------

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	

من جدول التغيرات نلاحظ أن من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)\le 0$.

- لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)<0$ ، و منه : $0<\ln(x+1)<x$.

II) لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$:

1) **بيان أن الدالة** f **فردية :** --

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، فإنّ : $-x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، وَ $f(-x)=-f(x)$ ،

إذن الدالة f فردية .

2) **حساب النهايات :** --

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$.

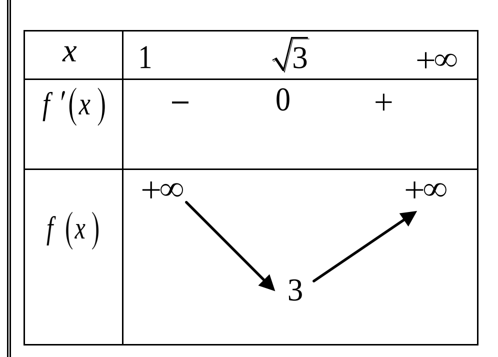
- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$.

3) **إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة** f ، **و تشكيل جدول تغيّراتها :** ------------------------

من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=1+\dfrac{\dfrac{x-1-(x-1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}=1+\dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ ،

إشارة $f'(x)$ من إشارة (x^2-3) ، أي : $x=\sqrt{3}$.

جدول تغيرات الدالة f **على المجال** $]1;+\infty[$ **:** ------------------



x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

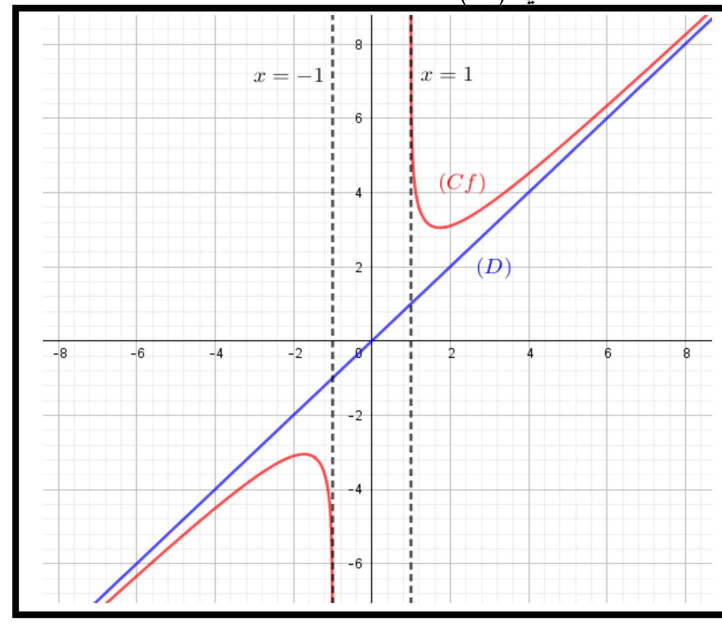
4) **برهان أن** (D) **مقارب للمنحنى** (C) : --------------------

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]=0$ ، و منه فإنّ (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

الوضعية : نلاحظ أنّ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ **:** $f(x)-x>0$ ،

و منه فإنّ المنحنى (C) يقع فوق (D) .

5) رسم المستقيم (D) و إنشاء المنحني (C) : --



6) باستعمال المكاملة بالتجزئة نبرهن أن: $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$: ----------------------------

لدينا : $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \int_2^4 \left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]dx$ ، أي :

$\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)\right]_2^4 = 5\ln 5 - 6\ln 3$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج مساحة الحيز : $A = \int_2^4 (f(x) - x)dx = \int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = (5\ln 5 - 6\ln 3)u.a$.

III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N} - \{0;1\}$ كما يلي : $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$:

1) بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة : بما أنّ الدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ متناقصة ، فإن المتتالية (u_n) متناقصة

2) حساب بدلالة n المجموع S_n : --

لدينا : $S_n = (\ln 3) + (\ln 4 - \ln 2) + (\ln 5 - \ln 3) + ... + (\ln(n) - \ln(n-2)) + (\ln(n+1) - \ln(n-1))$ ، أي:

بالجمع طرف لطرف نجد : $S_n = -\ln 2 + \ln(n+1)$ ، و منه : $S_n = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

3) برهان من أجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$: $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ ، **ثم تعيين** $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ----------------------------

لدينا : $0 < \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$ ، أي : $0 < \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$ ، و منه : $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$.

تعيين نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n-1}\right) = 0$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، حسب مبرهنة النهايات بالحصر .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

مديرية التربية لولاية الـــــوادي	ثانويات: بوشوشة- 19 مارس 1962
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي	حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي
الشعبة: علوم تجريبية	(دورة: ماي2014)

اختبار في مادة الرياضيات	المـدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقط)

أ)حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $(E): 0 = (z^2 - 2z + 4)(z + \sqrt{3} - 1)$

ب)في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$z_A = 1 - \sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1-أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم بيّن أن $z_B^{2016} + z_C^{2016} = 2^{2017}$.

2- بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n + z_C^n$ عدد حقيقي ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n + z_C^n = 2^n$

3- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

4- عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم احسب الطولين BC و GA

5-نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تتحقق: $BM^2 + CM^2 = 12 ...(1)$

*تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي المركب: (1) تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0 ...(2)$

* بين أن النقطة A تنتمي للمجموعة (S)،ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة

* علم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشئ المجموعة (S).

التمرين الثاني (04.5نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

1 -أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم الطولين AB و AC .

ب) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة ، ثم استنتج ان A ، B و C ليست في استقامية.

2- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3-(P) و (P') في الفضاء والمعرفين بمعادلتيهما على الترتيب : $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

بين ان المستقيم (Δ) والمعرف بتمثيله الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ هو تقاطع المستويين (P) و (P').

استنتج أن المستويات (P) ، (P') و (ABC) تشترك في نقطة واحدة يطلب تعيين احداثياتها.

4-لتكن (S) سطح الكرة والتي مركزها النقطة $\omega(1;-3;1)$ ونصف قطرها 3 .

أ)اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).

ب) أدرس تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ).

جـ) بين أن المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S).

التمرين الثالث (**04نقط**)

أجب **بصحيح** أو **خطأ** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1)في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 3i$ و $z_C = (1-2\sqrt{2}) + i(1-\sqrt{2})$.

النقطة C هي صورة النقطة B بواسطة التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ، ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

2) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

المتتالية (v_n) والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ حسابية حدّها الأول $v_0 = -\frac{1}{6}$ واساسها 5

التمرين الرابع (**07نقط**)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. الوحدة $4cm$

I- نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $g(x) = 1 - xe^x$.

1-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2-ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$ يحقق: $0,5 \prec \alpha \prec 1$ ، ثم استنتج أن: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

ب)استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ وذلك حسب قيم x

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) بيّن أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، ماذ تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟.

2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، ثم تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب) بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3-أ)بيّن أنه من كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x+1}$

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=x$.

4- انشئ المستقيم (d) والمنحى (C_f)

III-1-بيّن أنه إذا كان $x \in [0;\alpha]$ فإن : $f(x) \in [0;\alpha]$.

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ)باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (d) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وجد نهايتها

الموضــوع الثاني

التمرين الاول (**4.5نقط**)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث: $z'-1=2i(z-1)$

والتكن A ، B ، C نقط صور الأعداد المركبة : $z_A=1$ ، $z_B=4-i$ ، $z_C=3+i$

1- حدّد طبيعة التحويل S مع إعطاء عناصره المميزة

2- بين أن النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي يطلب تعيين لاحقة النقطة G مركز ثقله.

3-أ) عين لاحقتا النقطتين B' و C' صورتي النقطتين، B ، C بالتحويل S

ب) بين أن النقطة G' مركز ثقل المثلث $AB'C'$ هي صورة النقطة G بالتحويل S .

4-ليكن (Δ) مستقيم ذو المعادلة الديكارتية : $x+3y-1=0$.

أ) تحقق أن النقطتين A ، B تنتميان للمستقيم (Δ).

ب) استنتج المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S.

5-أ) بين أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن النقطة A :

$$AM'=2AM \text{ و } (\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM}) .$$

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

جـ) حدّد مجموعة النقط M' التي من اجلها النقطة M تمسح محور الفواصل.

التمرين الثاني :(**04 نقط**)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- احسب u_1 ، u_2 ، u_3.، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\succ 1$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n^2-1$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$.

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

جـ- أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

3)احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية :

$$S_n=u_0^2+u_1^2+....+u_n^2 \text{ ، } T_n=v_0+2v_1+....+2^n v_n \text{ و } L_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_n$$

التمرين الثالث (**4.5نقط**)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$.

واليكن المستوي (π) والمعرف بالمعادلة الديكارتية : $x+y+z-3=0$

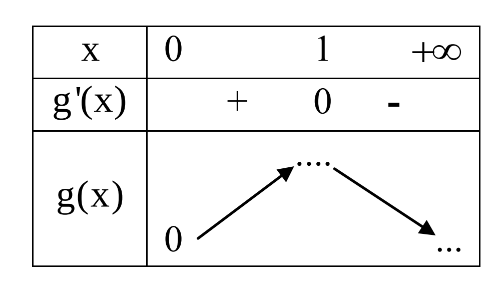
عين العبارة **الصحيحة** والعبارة **الخاطئة** من بين العبارات التالية مع التعليل في كل حالة.

1) المثلث ABC قائم.
2) المستوي (π) عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A .
3) المستوي (P) العمودي على المستقيم (AC) ويشمل A له معادلة ديكارتية من الشكل: $x - z = 1$.
4) المستويان (π) و (P) متقاطعان وفق مستقيم $\vec{k}$ شعاع توجيه له.
5) لتكن D نقطة من الفضاء إحداثياتها $(-1;4;0)$.
أ- المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
ب- حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$

التمرين الرابع: (**07 نقط**)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة هي $2cm^2$

I- الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة العددية g



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	....	↘	...

والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1- أ) احسب $g(1)$ ، ثم تحقق أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
ب- ب) أكمل جدول تغيرات الدالة g .
2-أ) علل وجود عدد حقيقي وحيد α على المجال $[1;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha) = 0$
ثم تحقق: $1,9 \prec \alpha \prec 2$
ب) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ:
$f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) بيّن أن : $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
2- أ) بين أن الدالة f فردية .
ب) بيّن أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$
جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
4) اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0.
5-أ) بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.
ب) أنشئ المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المعلم السابق.

III- أ) احسب التكامل $A(\alpha)$ والمعرف كمايلي: $A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{g(x)}{x^2}dx$
ب) بين أن: $A(\alpha) = f(\alpha)$

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط
امتحان شهادة البكالوريا التجريبية دوة:2014
لثانويات:بوشوشة-19مارس1962-حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي ولاية الوادي
المادة: رياضيات **الشعبة: علوم تجريبية**

<table>
<tr><th>محاور الموضوع</th><th>عناصر الإجابة :الموضوع الأول</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td></td><td>

<u>**التمرين الأول**</u>:

أ)حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة (E) :

لدينا: $(z+\sqrt{3}-1)(z^2-2z+4)=0.....(E)$

(E) تكافئ $(z^2-2z+4)=0$ أو $(z+\sqrt{3}-1)=0$

تكافئ $(z^2-2z+1)=-3$ أو $(z=1-\sqrt{3})=0$

تكافئ $(z-1)^2=(i\sqrt{3})^2$ أو $(z=1-\sqrt{3})=0$

تكافئ $z=1+i\sqrt{3}$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1-\sqrt{3}$

وعليه مجموعة الحلول هي : $1+i\sqrt{3}$ ، $1-i\sqrt{3}$ و $1-\sqrt{3}$.

1- كتاب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ،ثم تبيّان أن $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2017}$.

$z_A=1-\sqrt{3}=-(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}-1)e^{\pi i}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $z_C=\overline{z_B}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

لدينا: $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2016}.2\operatorname{Re}(z_B)=2^{2017}\cos(\frac{2016\pi}{3})=2^{2017}\cos(0)=2^{2017}$

2- تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n+z_C^n$ عدد حقيقي .

لدينا: $z_B^n+z_C^n=2^{n+1}\operatorname{Re}(z_B)=2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})\in\mathbb{R}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n+z_C^n=2^n$

$z_B^n+z_C^n=2^n$ تكافئ $2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})=2^n$ حسب ما ورد في الجواب السابق.

ومنه: $\cos(\frac{n\pi}{3})=\frac{1}{2}$ أي $\begin{cases}\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \frac{n\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ وعليه: $\begin{cases}n=1+6k\\ n=-1+6k\end{cases};k\in\mathbb{N}^*$

3-اعطاء تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}$

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i$ بعد التبسيط وضرب البسط والمقام في مرافق المقام

عليه: $\left|\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right|=|-i|=1$ معناه $AC=AB$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين لأن : $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}$

</td><td></td></tr>
</table>

4-تعيين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم حساب الطولين BC و GA

* لدينا: G منتصف القطعة $[BC]$ ومنه : $z_G = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2} = 1$

* لدينا: $BC = |z_C - z_B| = |-i2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ و $GA = |z_A - z_G| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

5-*التحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي: (1) تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0...(2)$

لدينا: $BM^2 + CM^2 = 12...(1)$ تكافئ $(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC})^2 - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}^2$

تكافئ $2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0$ تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0...(2)$

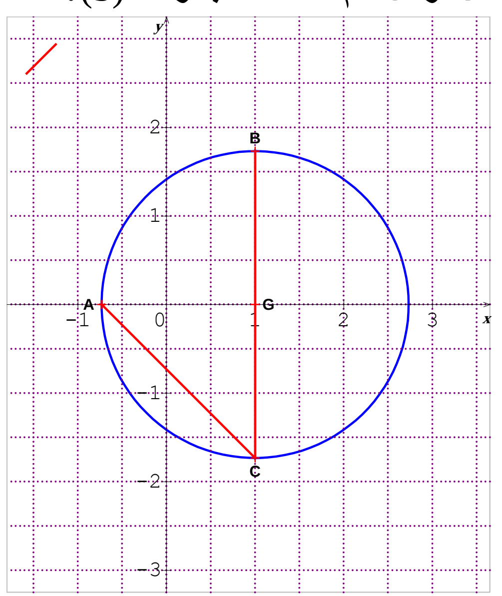
***تبيان أن A تنتمي لـ (S)، ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة**

- A تنتمي لـ(S) لأن: $BA^2 + CA^2 = BC^2$ محققة لأن المثلث ABC قائم في A.

- من العلاقة $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0...(2)$ نستنتج ان (S) دائرة قطرها $[BC]$

- (S) دائرة قطرها $[AB]$ مركزها G ونصف قطرها $GA = \sqrt{3}$.

*** تعليم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشاء المجموعة (S).**



التمرين الثاني:

1 -أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم الطولين AB و AC .

$\overrightarrow{AB}(3;2;-2).\overrightarrow{AC}(0;2;1) = 3.0 + 2.2 - 2.1 = 2$

$AB = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ و $AC = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ب) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة .

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ وعليه: $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC.} = \frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{17}}$

ومنه:قيس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ والقرب إلى الوحدة هو : $\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{85}}) \approx 78°$

استنتج ان A ، B و C ليست في استقامية.

النقاط A ، B و C ليست في استقاميةلأن قيس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ هو $78°$.

2- التحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

يكفي أن نبين أن احداثيات النقاط A ، B و C تحقق صحة معادلة(ABC)

لدينا: $2(-2)-0+2(1)+2=0$ ومنه : $A\in(ABC)$.

$2(1)-2+2(-1)+2=0$ ومنه : $B\in(ABC)$.

$2(-2)-2+2(2)+2=0$ ومنه : $C\in(ABC)$.

3- تبيان ان المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين (P) و (P').

(Δ) هو تقاطع (P) و (P') معناه: (Δ) محتوى في (P) و (Δ) محتوى في (P')

(Δ) محتوى في (P) لأن: $-2+(3t-1)-3t+3=0$ محققة

(Δ) محتوى في (P') لأن: $-2-2(3t-1)+6t=0$ محققة.

استنتاج أن : (P) ، (P') و (ABC) تشترك في نقطة واحدة يطلب تعيين احداثياتها

من الجواب السابق لدينا (Δ) هو تقاطع (P) و (P')

نبين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ولذلك نحل الجملة التالية:

$(s): 2x-y+2z+2=0$ و $\begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$ و منه: $2(-2)-(3t-1)+2t+2=0$

أي: $t=-1$ أي احداثيات نقطة التقاطع هي: $(-2;-4;-1)$ وذلك بعد تعويض قيمة $t=-1$

4- أ) كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).

لدينا: (S) مركزها النقطة $\omega(1;-3;1)$ ونصف قطرها 3 .

المعادلة الديكارتية لـ (S) هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

وعليه معادلة (S) هي: $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

ب) دراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ).

لدراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ) نحسب المسافة بين (Δ) و $\omega(1;-3;1)$

لدينا: $d(\omega;(\Delta))=H\omega$ حيث H هي المسقط العمودي للمركز ω على (Δ)

لدينا: $H(-2;3t-1;t)$ لأن $H\in(\Delta)$ وعليه يكون : $\overrightarrow{\omega H}.\vec{u}_\Delta=0$

$\overrightarrow{\omega H}.\vec{u}_\Delta=0$ تكافئ $\overrightarrow{\omega H}(-3;3t+2;;t-1).\vec{u}_\Delta(0;3;1)=10t+5=0$ أي: $t=-\frac{1}{2}$

وعيله تكون احداثيات النقطة H هي: $(-2;-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})$

ومنه: $d(\omega;(\Delta))=H\omega=\sqrt{(-3^2+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{5}{2})^2}=\frac{\sqrt{46}}{2}\succ R=3$

وعليه يكون تقاطع (S) و (Δ) هو مجموعة خالية.

جـ) تبيان أن المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S).

المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S) معناه $d(\omega;(ABC))=R$

$$d(\omega;(ABC))=\frac{|2x_\omega-y_\omega+2z_\omega+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

التمرين الثالث

الإجابة **بصحيح** أ و **خطأ** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1) C هي صورة Bب بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ، ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

خطأ : لأن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\sqrt{2}$ ومن المفروض $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i\sqrt{2}$

2) المستوي (P) الذي معادلته $2x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

صحيح: لأن: $A(2;1;-1)$ لاتنتمي للمستوي (P) و $\vec{u}(1;-1;1) \perp \vec{n}(2;1;-1)$

3)المتتالية (v_n) حسابية حدّها الأول $v_0 = -\frac{1}{6}$ واساسها 5

خطأ : لأن: أساس المتتالية (v_n) يساوي: $q = v_1 - v_0 = \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{2}$.

التمرين الرابع

I-1-تعيين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 - xe^x) = -\infty$$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

دراسة اتجاه تغير g و تشكيل جدول تغيراتها.

$$g'(x) = (1 - xe^x)' = -1.e^x - xe^x = -e^x(x+1)$$

$g'(x) \prec 0$ لأن: $x \in [0;+\infty[$ وعليه تكون الدالة g متناقصة تماماعلى مجال تعريفها

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

3- أ) تبيّان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$ يحقق: $0,5 \prec \alpha \prec 1$ ، ثم استنتاج أن: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0,5;1[$ و $g(0,5) \times g(1) \prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]0,5;1[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $1 - \alpha e^\alpha = 0$ ومنه $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

ب)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ وذلك حسب قيم x

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 3-أ) نستنتج أن :

$g([0;\alpha[) =]1;0]$ معناه $g(x) \geq 0$ و $g([\alpha;+\infty[) =]-\infty;0]$ معناه $g(x) \leq 0$

II- 1) تبيّان أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f).

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x + 1}$ حالة عدم التعيين لأن: $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^x + 1) = +\infty$

إزالة حالة عدم التعيين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ معناه (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب في جوار $+\infty$

2- أ) تبيان أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، والتحقق أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها حاصل قسمة الدالتين:

$x \to (x+1)$ و $x \to (e^x+1)$ قابلتين للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1(e^x+1) - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{1-e^x(x)}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب) تبيان أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

*لدينا: $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{(e^\alpha+1)^2}$ ولدينا من الجواب 3- أ) $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

وعليه: $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\frac{1}{\alpha}+1} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = \alpha$

*لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$

ومنه :الدالة f تكون متزايدة على المجال $]0;\alpha[$

ومتناقصة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	α	↘	$-\infty$

<u>ملاحظة</u>: f معرفة عند 0 و $f(0) = \dfrac{1}{2}$

3-أ)تبيّان أنه من كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

لدينا: $f(x) - x = \dfrac{x+1}{e^x+1} - x = \dfrac{x+1-x(e^x+1)}{e^x+1} = \dfrac{1-x(e^x)}{e^x+1} = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

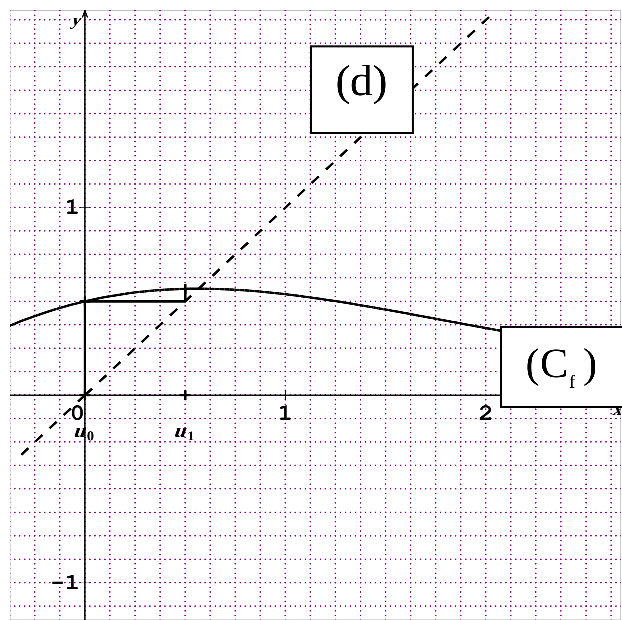
ب) استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = x$.

الوضع النسبي لـ(C_f) و المستقيم (d) هو حسب إشارة الفرق $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

وعليه يكون: $x \in]0;\alpha[$ معناه (C_f) فوق (d) و $x \in]\alpha;+\infty[$ معناه (C_f) تحت (d)

ولدينا: $f(\alpha) = \alpha$ معناه (C_f) يقطع (d) في النقطة التي احداثييها $(\alpha;\alpha)$.

4- إنشاء (d) والمنحى (C_f) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3



III - 1-تبيّان أنه إذا كان $x \in [0;\alpha]$ فإن : $f(x) \in [0;\alpha]$.

لدينا: $x \in [0;\alpha]$ معناه $0 \le x \le \alpha$ ومنه: $f(0) \le f(x) \le f(\alpha)$ لأن: f متزايدة

ولدينا: $f(0) = \frac{1}{2}$ و $f(\alpha) = \alpha$ عليه: $0 \prec \frac{1}{2} \le f(x) \le \alpha$ أي: $f(x) \in [0;\alpha]$.

2-أ)تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3. رفقة تمثيل المنحنى(C_f)

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

* التأكد من صحة $p(0)$

من أجل $n = 0$ يكون: $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ محققة لأن: $u_0 = 0$ و $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}$

* نفرض أن: $p(n)$ صحيحة من أجل $n = k$ حيث $n \ge k$ أي: $0 \le u_k \le u_{k+1} \le \alpha$

ونبرهن أن: $p(n+1)$ صحيحة أي: $0 \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le \alpha$

لدينا: $0 \le u_k \le u_{k+1} \le \alpha$ ومنه $f(0) \le f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(\alpha)$ لأن: f متزايدة

ومنه: $0 \prec \frac{1}{2} \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le \alpha$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وإيجاد نهايتها

من المتباينة : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ نستنتج أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل وعليه تكون المتتالية (u_n) متقاربة.

نفرض: $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = L$ ونبحث عن قيمة L أي نحل المعادلة $f(L) = L$.

$f(L) = L$ تكافئ $L = \frac{L+1}{e^L + 1}$ أي: $1 - Le^L = 0$ معناه $g(L) = 0$ إذن: $L = \alpha$

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا التجريبية دوة:2014

لثانويات:بوشوشة-19مارس1962-حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي ولاية الوادي

المادة: رياضيات **الشعبة: علوم تجريبية**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة :الموضوع الثاني	مجزأة
	التمرين الأول: **1- تحديّد طبيعة التحويل S مع إعطاء عناصره المميزة** العبارة المركبة للتحويل S هي: $z'-1=2i(z-1)$ حيث : $a=2e^{\frac{\pi}{2}i}$ و $z_{\omega}=z_A$ التحويل S تشابه مباشر لأن: $a\in\mathbb{C}$ و $\|a\|=2$ وتختلف عن 1 . العناصر المميزة لتشابه المباشر S هي: المركز A و النسبة $\|a\|=2$ والزاوية $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ **2-تبيان أن النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي و تعيين لاحقة النقطة G مركز ثقله.** النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي معناه: $\overrightarrow{AB}$ لايوازي $\overrightarrow{AC}$ لأن: $\overrightarrow{AC}\neq K\overrightarrow{AB}$ لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث هي : $z_G=\frac{z_A+z_C+z_B}{3}=\frac{8}{3}$ **3-أ) تعيين لاحقتا النقطتين B' و C' صورتي النقطتين، B ، C بالتحويل S** لاحقة النقطة B' صورة B هي: $z_{B'}-1=2i(z_B-1)=3+6i$ لاحقة النقطة C' صورة C هي: $z_{C'}-1=2i(z_C-1)=-1+4i$. **ب) تبيان أن النقطة G' مركز ثقل المثلث AB'C' هي صورة النقطة G بالتحويل S .** لدينا: $z_{G'}-1=2i(z_G-1)=1+\frac{10}{3}i$ ولدينا: $z_{G'}=\frac{z_A+z_{C'}+z_{B'}}{3}=1+\frac{10}{3}i$ ومنه: $z_{G'}=S(G)$ **4- أ) التحقق أن النقطتين A ، B تنتميان للمستقيم (Δ).** $A\in(\Delta)$ لأن احداثيا النقطة A تحقق صحة المعادلة $x+3y-1=0$ لأن: $1+3(0)-1=0$ $B\in(\Delta)$ لأن احداثيا النقطة B تحقق صحة المعادلة $x+3y-1=0$ لأن: $4+3(-1)-1=0$. ب) استنتاج المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S. من الجواب السابق نستنتج ان (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S يشمل النقطتين A ، B' وعليه يكون $M(x;y)\in(\Delta')$ معناه $\overrightarrow{AM}(x-1;y)\,\|\,\overrightarrow{AB'}(2;6)$ معناه $6x-2y-6=0$ أي $3x-y-3=0$ **5-أ) تبيان أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن النقطة A :** $AM'=2AM$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ لدينا: $z'-1=2i(z-1)$ تكافئ $\begin{cases}\|z'-1\|=\|2i\|\|z-1\|\\\arg(z'-1)=\arg(2i)+\arg(z-1)\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}AM'=2AM\\(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})\end{cases}$	

ب) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 2 لأن:النقطة A صامدة بالتحويل S ونسبة التشابة هي 2 .

أي: $AM = 1$ تكافئ $AM' = 2$

جـ) تحديد مجموعة النقط M' التي من اجلها النقطة M تمسح محور الفواصل.

لدينا: M تمسح محور الفواصل معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وعليه العلاقة $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u};\overrightarrow{AM})$ تكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $M' \in (\Delta) - \{A\}$ حيث (Δ) معادلته $x = 1$

<u>**التمرين الثاني**</u>:

1) أ- حساب u_1 ، u_2 ، u_3.، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

لدينا: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

* ومنه: $u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{5}$ ، $u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{3}$ و $u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{2}$

* <u>البرهان بالتراجع:</u>

1) التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ فإن: $u_0 \succ 1$ محققة لأن : $u_0 = 3 \succ 1$.

2) نفرض أن: $p(n)$ صحيحة أي: $u_k \succ 1$ حيث $n \geq k$

ونبرهن أن: $p(n+1)$ صحيحة أي: $u_{k+1} \succ 1$ أي نبرهن أن: $u_{k+1} = \sqrt{\frac{1+u_k^2}{2}}$

لدينا حسب فرضية التراجع: $u_k \succ 1$

ومنه : $u_k^2 \succ 1$ ومنه : $1+u_k^2 \succ 2$ ومنه: $\frac{1+u_k^2}{2} \succ 1$ ومنه: $\sqrt{\frac{1+u_k^2}{2}} \succ 1$ أي: $u_{k+1} \succ 1$

ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب-تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ معناه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{-u_n^2+1}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$ بعد الضرب والقسمة في المرافق

اشارة الفرق هي دوما سالبة لأنها حسب إشارة البسط $-u_n^2 + 1$ لأن: $u_n \succ 1$ والمقام موجب تماما.

وعليه تكون المتتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم حساب نهايتها.

*المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل بـ 1 ($u_n \succ 1$) ومتناقصة

* حساب نهاية (u_n): نفرض أن: $\lim_{x\to+\infty} u_n = L$ حيث L عدد حقيقي موجب تماما

$\lim_{x\to+\infty} u_n = L$ معناه $L = \sqrt{\frac{1+L^2}{2}}$ وعليه $L^2 = \frac{1+L^2}{2}$ ومنه $L^2 = 1$ وأخيرا $L = 1$

2- أ- تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2v_{n+1} = v_n$.

لدينا: $v_n = u_n^2 - 1$ ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{v_n}{2}$ أي: $2v_{n+1} = v_n$

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدّها الأول v_0.

من العلاقة التراجعية: $2v_{n+1} = v_n$ نستنتج أن: $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$

وعليه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0^2 - 1 = 8$.

جـ- كتابة بدلالة n، كلا من v_n و u_n، ثم أحسب من جديد $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

(v_n)*متتالية هندسية حدّها العام هو: $v_n = v_0.q^n$ وعليه $v_n = 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

* حساب نهاية (u_n): $\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{8.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 1$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

3) حساب بدلالة n كلا من المجاميع التالية: S_n، T_n و L_n

*لدينا: $v_n = u_n^2 - 1$ ومنه: $u_n^2 = v_n + 1$

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2 = (v_0+1) + (v_1+1) + ... + (v_n+1)$$

وعليه:

$$= (v_0 + v_1 + ... + v_n) + 1(n+1) = v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] + (n+1)$$

<u>تطبيق عددي</u>: $(n+1) + \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]16 = (n+1) + \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]8 = S_n$

$$* \quad T_n = v_0 + 2v_1 + ... + 2^n v_n = v_0 + 2v_0(q) + ... + 2^n v_0(q^n)$$

و بمأن: $q = \frac{1}{2}$ فإن: $T_n = v_0 + v_0 + ... + v_0 = v_0(n+1) = 8(n+1)$.

$$* L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n = \ln(v_0 \times v_1 \times .... \times v_n)$$

ولدينا: $v_0 \times v_1 \times .... \times v_n = v_0 \times v_0 q \times .... \times v_0 q^n = v_0^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = 8^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

وعليه: $L_n = \ln(8^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}})$

التمرين الثالث

تعيين العبارة **الصحيحة** والعبارة **الخاطئة** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1) المثلث ABC قائم.

صحيحة: لأن: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ لأن : $\overrightarrow{AB}(3;3;3).\overrightarrow{AC}(3;0;-3) = 9-9=0$.

2) المستوي (π) عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A.

صحيحة: لأن:إحداثيات A تحقق صحة معادلة: (π) لأن: $3+(-2)+2-3=0$

و $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\vec{n}_{(\pi)}$ لأن: $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}_{(\pi)}$.

3) المستوي (P) العمودي على المستقيم (AC) ويشمل A له معادلة ديكارتية من الشكل: $x-z=1$.

صحيحة: لأن: إحداثيات A تحقق صحة معادلة: (P) لأن: $3-2=1$

و $\overrightarrow{AC}$ يوازي $\vec{n}_{(P)}$ لأن: $\overrightarrow{AC}=3\vec{n}_{(P)}$.

4) المستويان (π) و (P) متقاطعان وفق مستقيم $\vec{k}$ شعاع توجيه له.

خاطئة لأن: $\vec{n}_{(P)}$ لايوازي $\vec{n}_{(\pi)}$ لكن : $\vec{k}(0;0;1)$ لا يعامد $\vec{n}_{(P)}$ لأن: $\vec{k}.\vec{n}_{(P)} \neq 0$.

5) أ-المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

خاطئة لأن: $\overrightarrow{AD}$ لا يعامد $\overrightarrow{AC}$ لأن: $\overrightarrow{AC}.\ \overrightarrow{AD} \neq 0$.

ب-حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$.

لدينا: حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى بالعلاقة $v_{ABCD}=\frac{S_{ABC}.d(D;(ABC))}{3}$

$$d(D;(ABC))=\frac{|ax_D+bx_D+cx_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ و } S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}.3\sqrt{2}}{2}$$

ومنه: $v_{ABCD}=\frac{4.3\sqrt{3}.3\sqrt{2}}{3.2.\sqrt{3}}=6\sqrt{3}u.a \neq \frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$

التمرين الرابع

I-1-أ) حساب $g(1)$ **، ثم التحقق أن :** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ **.**

$$g(1)=1-\ln 3 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)=2-\infty=-\infty$$

ب) أكمال جدول تغيرات الدالة g **.**

x	0	1	$+\infty$
g'(x)	+	0	-
g(x)	0 ↗	g(1)	↘ $-\infty$

2-أ)تعليل وجود عدد حقيقي وحيد α **على المجال** $[1;+\infty[$

بحيث: $g(\alpha)=0$ ، **ثم التحقق:** $1,9 \prec \alpha \prec 2$

الدالة g مستمرة ومتنا قصة المجال $[1;+\infty[$

(من جدول تغيرات) و $g(1) \succ 0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

ومنه توجد قيمة وحيدة α على المجال $[1;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha)=0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: $g(1,9)=0,037$ و $g(2)=-0,0093$ أي $g(1,9).g(2) \prec 0$ ومنه : $1,9 \prec \alpha \prec 2$

ب) استنتاج اشارة $g(x)$ **على المجال** $[0;+\infty[$**.**

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 3-أ) نستنتج أن :

$g([0;\alpha[)=[0;1-\ln 3[$ معناه $g(x)\geq 0$ و $g([\alpha;+\infty[)=]-\infty;0]$ معناه $g(x)\leq 0$.

II -1) تبيّان أن : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ **ثم تفسير النتيجة هندسيا .**

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$ ملاحظة : $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$ نهاية شهيرة

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ تكافئ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$ نستنتج ان (C_f) يقبل مماسا معامل توجبهه 1

2- أ) تبيان أن الدالة f **فردية .**

الدالة f فردية معناه $f(-x)+f(x)=0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

$$f(-x)+f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{-x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x}=0$$

ب) تبيّان أن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ **ثم استنتاج** $\lim_{x\to-\infty}f(x)$**.**

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ حالة عدم التعيين

<u>ازالة حالة عدم التعيين</u>

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=0$$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ لأن f دالة فردية.

3-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x **يختلف عن 0 :** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2+1}(x)-1.\ln(x^2+1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن أشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$

وعليه تكون f متزايدة على المجال $]0;\alpha[$ ومتناقصة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ) تشكيل جدول تغيرات الدالة f **على** $\mathbb{R}$ **.**

من الجواب السابق وبمأن الدالة f فردية فإن جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ يكون كمايلي:

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0 ↘	$-f(\alpha)$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

4) كتابة معادلة المماس (Δ) **عند النقط ذات الفاصلة 0.**

المماس (Δ) له معادلة من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $f'(0)=1$ من الجواب (II-1) (التفسير الهندسي $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$) ولدينا: $f(0)=0$

وعليه تكون معادلة (Δ) من الشكل: $y=x$

5-أ) تبيّان أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ **، ثم جد حصرا للعدد** $f(\alpha)$**.**

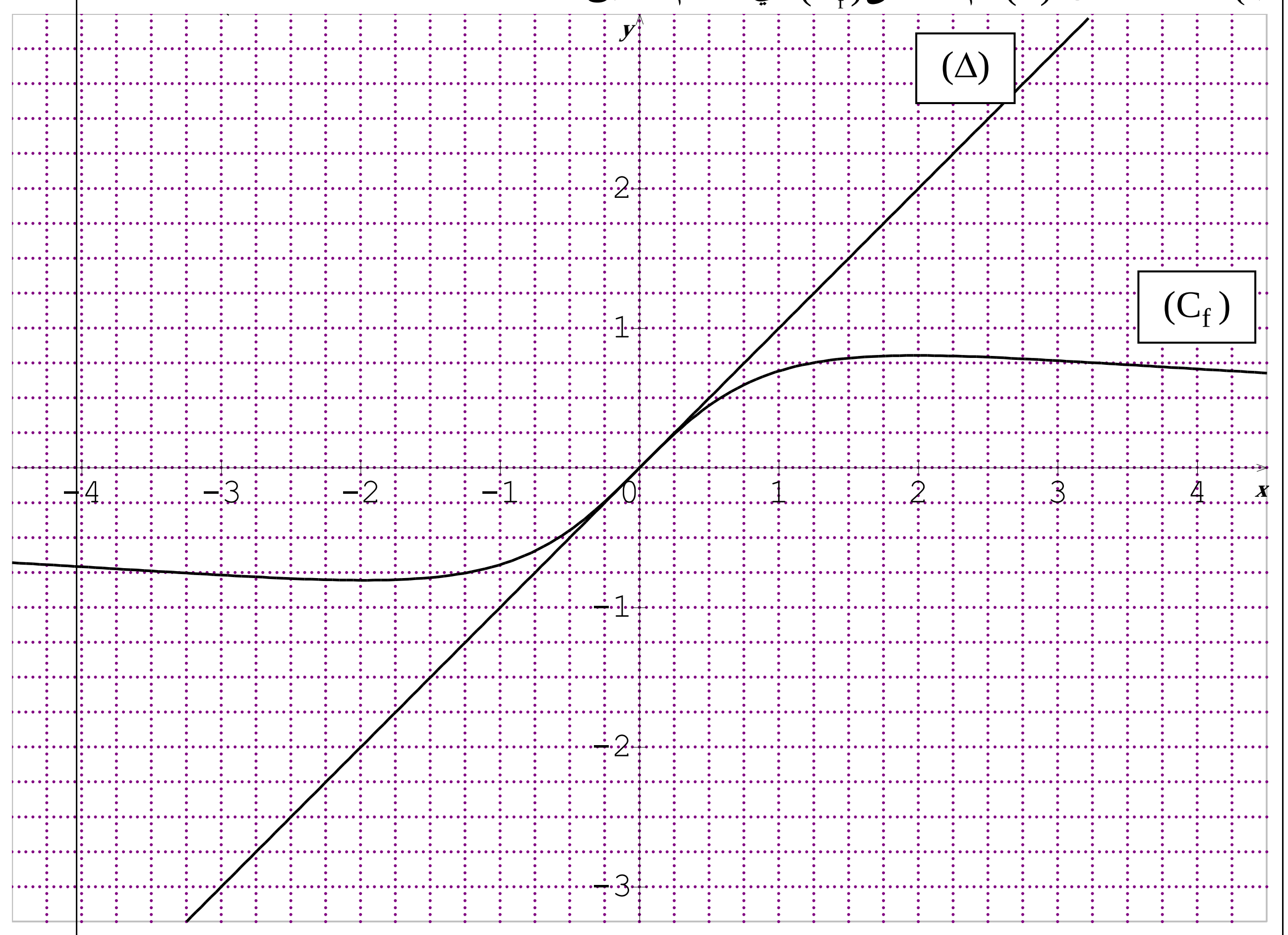
لدينا: $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$ ومن جهة أخرى لدينا: $g(\alpha)=0$ معناه $\ln(\alpha^2+1)=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha}=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)}=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

الحصر :لدينا: $1,9\prec\alpha\prec 2$ ومنه $3,8\prec 2\alpha\prec 4....(1)$ ولدينا أيضا: $4,61\prec\alpha^2+1\prec 5.....(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\dfrac{3,8}{5}\prec f(\alpha)\prec\dfrac{4}{4,61}$ أي $0,76\prec f(\alpha)\prec 0,86$.

ب)انشاء المماس (Δ) ثم المنحنى(C_f) في المعلم السابق.



III- أ)احسب التكامل $A(\alpha)$ والمعرف كمايلي: $A(\alpha)=\int_0^\alpha\dfrac{g(x)}{x^2}dx$

$$A(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{g(x)}{x^2}dx=\int_0^\alpha f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^\alpha$$

ب) تبيان أن: $A(\alpha)=f(\alpha)$

$$A(\alpha)=f(\alpha)-f(0)=f(\alpha)$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية   **مديرية التربية لولاية الشلف**   **ثانوية بلحاج قاسم نورالدين**

بكالوريا تجريبي   **دورة ماي 2015**

الشعبة : رياضيات   **مدة الانجاز : 4 ساعات ونصف**

اختبار في مادة الرياضيات

☜ على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

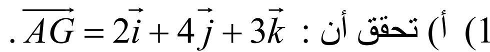
👍 الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث ،



$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}, \overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.



1) أ) تحقق أن : $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

ب) عين إحداثيي الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$.

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(EBG\right)$.

2) ليكن α عدد حقيقي يختلف عن 1 و $M\left(2\alpha;4\alpha;3\alpha\right)$ نقطة من الفضاء .

أ) تحقق أن النقطة M تنتمي الى المستقيم $\left(AG\right)$ باستثناء النقطة G .

ب) بين أن النقطة M لا تنتمي الى المستوي $\left(EBG\right)$.

3) ليكن V حجم رباعي الوجوه $MEBG$.

أ) عبر عن V بدلالة α.

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $AEBG$.

ج) من أجل أية قيمة للعدد الحقيقي α، يكون V مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط C,B,A و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

- بين أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة $\left(C\right)$التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_{\Omega}=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .

3) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O.

أ) بين أن : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C. يطلب تعيين زاويته .

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث ،

$z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$.

أ) عين طبيعة S وعناصره المميزة .

ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

ج) عين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية .

التمرين الثالث (04.5 نقطة)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$

1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q.

2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$

4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .

ب) عين باقي القسمة الاقليدية لـلعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5.

ج)نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+...+\ln 4^n\right]$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

التمرين الرابع :(07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف .

2) أحسب $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ).

4) احسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f)؟

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0.4<\alpha<-0.3$.

6) أرسم (Δ) و (C_f).

III. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$.

1) أحسب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=\lambda, x=1$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda)=2cm^2$.

☝ الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04.5 نقاط)

في الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $C(3;2;1), B(1;2;0), A(3;1;0)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب .

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$.

ب) أحسب مساحة المثلث ABC .

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه وأن حجمه $V_{ABCD}=\dfrac{2m+5}{6}$.

4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.

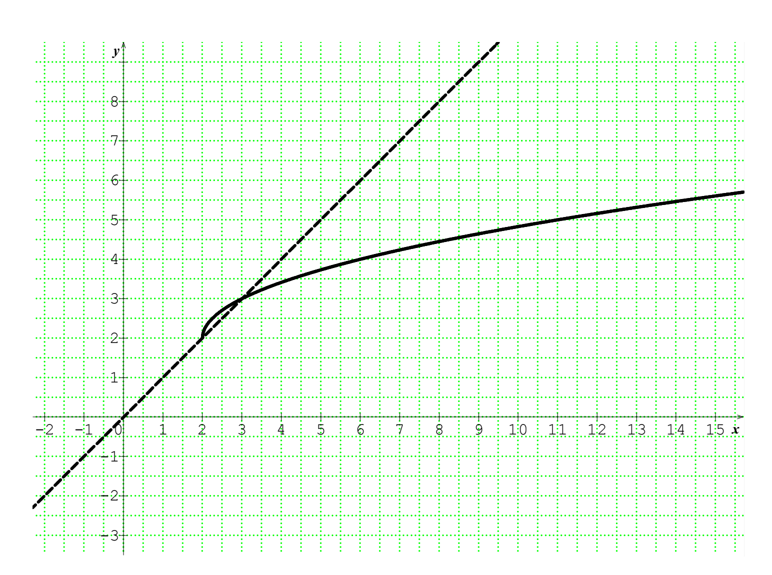
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m).

ج) أكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m).

التمرين الثاني:(04.5 نقطة)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} u_0=11 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n-2}+2 \end{cases}$



1) أ) باستعمال المنحني (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x-2}+2$ و المنصف الاول ذي المعادلة $y=x$ ، مثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل .

ب) ما هو تخمينك لاتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3\le u_n\le 11$.

3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$.

4) بين أنَ المتتالية (u_n) متناقصة .

5) استنتج مما سبق أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها .

6) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}-3\le\dfrac{1}{2}(u_n-3)$.

ب) استنتج أن : $0\le u_n-3\le 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n، ثم عين نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث :(04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2) أكتب الحلول على الشكل المثلثي .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$

أ) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع

ب) أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي .

4) ليكن التحويل النقطي S الذي بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقط M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+3i$

أ) عين طبيعة التحويل S و أعط عناصره المميزة.

ب) بين أن المجموعة (Γ) للنقط M و التي تحقق $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

ج) عين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S و أعط عناصرها المميزة .

التمرين الرابع :(06.5 نقطة)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ (يمكن وضع $f(x)=\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$) وعند $+\infty$. فسر النتيجتين هندسيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(e^x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أرسم المنحني (C_f).

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)+f(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$

ب) عين دالة أصلية F للدالة f على المجموعة $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 0 .

ج) أحسب وبوحدة المساحات cm^2 المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$, $x=\ln 2$.

✌ مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح في البكالوريا جوان 2015 ❀ أستاذ المادة

تصحيح البكالوريا التجريبي   الدورة : ماي 2015   الشعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التصحيح	التنقيط
التمرين الأول :	**04 نقاط**
لدينا : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات حيث ، $\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$	
1) أ) **التحقق أن : $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$:** لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ لان : $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}=3\vec{k},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=4\vec{j},\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$	0.25
ب) تعيين إحدثيي كل من الشعاعين $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$: لدينا : $\overrightarrow{EB}(2;0;-3)$ و $\overrightarrow{EG}(2;4;0)$	2×0.25
ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (EBG) : لدينا : $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EG}$ شعاعي توجيه للمستوي (EBG). لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (EBG) يعني يوجد عددان حقيقيان β,λ بحيث يكون : $\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EB}+\beta\overrightarrow{EG}$ أي $\begin{cases}x=2\lambda+2\beta\\y=4\beta\\z-3=-3\lambda\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x=2\lambda+2\beta\\y=4\beta\\z=-3\lambda+3\end{cases};(\lambda;\beta)\in\mathbb{R}^2$ هي جملة التمثيل الوسيطي للمستوي (EBG). من الجملة السابقة لدينا : $\begin{cases}3x+2z=3(2\lambda+2\beta)+2(-3\lambda+3)\\y=4\beta\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}3x+2z=6\beta+6\\y=4\beta\end{cases}$ أي $3x+2z=6\times\frac{y}{4}+6$ ومنه $3x+2z-\frac{3}{2}y-6=0$ وبالتالي $6x-3y+4z-12=0$ معادلة للمستوي (EBG)	0.5
2) لدينا : $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$ و $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$	
أ) التحقق أن النقطة $M\in(AG)$ ماعدا النقطة G : تمثيل وسيطي للمستقيم (AG) : $\begin{cases}x=2t\\y=4t;(t\in\mathbb{R})\\z=3t\end{cases}$ نعوض بإحداثيات النقطة M في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases}2\alpha=2t\\4\alpha=4t\\3\alpha=3t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=\alpha\\t=\alpha\\t=\alpha\end{cases}$ **اي M تنتمي الى المستقيم (AG) ماعدا النقطة G لان $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$**	0.5
ب) اثبات أن النقطة $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$ لاتنتمي الى المستوي (EBG) : نعوض بإحداثيات النقطة $M(2\alpha;4\alpha;3\alpha)$ في معادلة (EBG) نجد : $6(2\alpha)-3(4\alpha)+4(3\alpha)-12=12\alpha-12$ وبما أن $\alpha\neq1$	0.5

	فان $12\alpha - 12 \neq 0$ ومنه $M \notin (EBG)$
0.75	**3) أ) التعبير عن الحجم V بدلالة α:** لدينا: $V = \frac{1}{3} S_{(EBG)} \times h$ **حساب $S_{(EBG)}$:** لدينا: $S_{(EBG)} = \frac{1}{2} \times EB \times EG \times \sin \widehat{BEG}$ **حساب $\sin \widehat{BEG}$:** لدينا: $\cos \widehat{BEG} = \frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EG}}{EB \times EG} = \frac{4}{2\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$ ولدينا: $\sin^2 \widehat{BEG} + \cos^2 \widehat{BEG} = 1$ ومنه $\sin^2 \widehat{BEG} + \frac{4}{65} = 1$ أي $\sin^2 \widehat{BEG} = 1 - \frac{4}{65} = \frac{61}{65}$ وبالتالي $\sin \widehat{BEG} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$ إذن: $S_{(EBG)} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{65} \times \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}} = \sqrt{61}$ أي $S_{(EBG)} = \sqrt{61}\ us$ ▪ **حساب h:** $h = d(M,(BEG)) = \frac{\vert 12\alpha - 12\vert}{\sqrt{36+9+16}} = \frac{12\vert\alpha - 1\vert}{\sqrt{61}}$ إذن: $V = \frac{1}{3}\sqrt{61} \times \frac{12\vert\alpha-1\vert}{\sqrt{61}} = 4\vert\alpha - 1\vert$ أي $V = 4\vert\alpha - 1\vert\ uv$
0.5	**ب) حساب حجم رباعي الوجوه $AEBG$:** $V_{AEBG} = \frac{1}{3} S_{AEB} \times GF$ لدينا: $S_{AEB} = \frac{1}{2} \times AB \times AE = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3us$ و لدينا: $GF = AD = 4$ أي $V_{AEBG} = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 = 4uv$
0.5	**ج) تعيين قيمة α بحيث يكون الحجم V مساويا لحجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$:** لدينا: $V_{ABCDEFGH} = 2 \times 3 \times 4 = 24uv$ $V = V_{ABCDEFGH}$ يعني $4\vert\alpha - 1\vert = 24$ ومنه $\vert\alpha - 1\vert = 6$ إما: $\alpha - 1 = 6$ ومنه $\alpha = 7$ أو: $\alpha - 1 = -6$ ومنه $\alpha = -5$ أي $\alpha \in \{-5;7\}$
04.5 نقطة	**التمرين الثاني:**
	1) حل المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$: $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ يكافئ $z^2+3=0$ أو $z^2-6z+21=0$

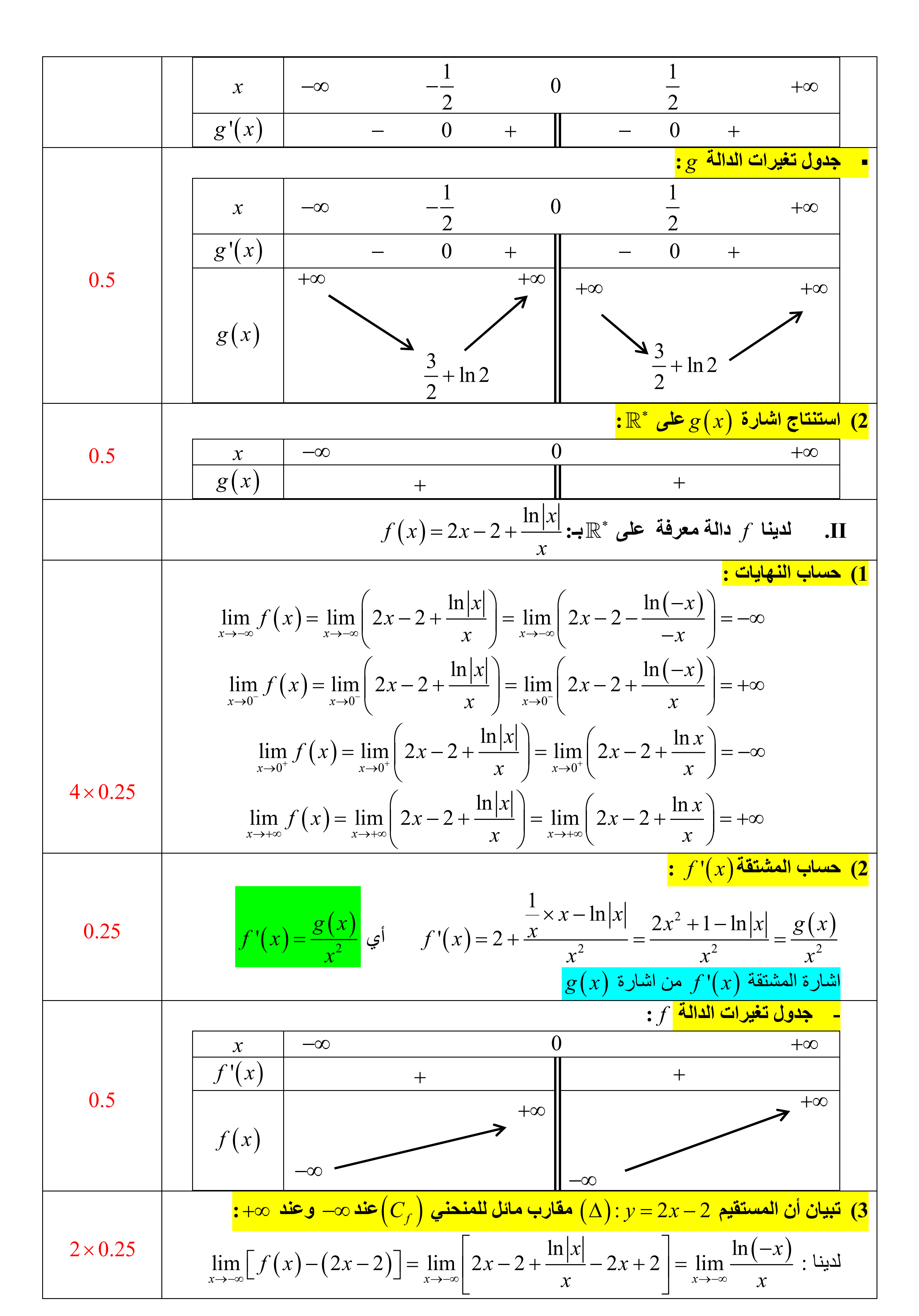
▪ حل المعادلة $z^2+3=0$: $z^2+3=0$ يكافئ $z^2=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ يكافئ $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$	0.5
▪ حل المعادلة $z^2-6z+21=0$: ▪ حساب المميز : $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=36-84=-48$ $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ▪ المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\dfrac{6-4i\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=3+2i\sqrt{3}$ ▪ مجموعة حلول المعادلة : $S=\left\{-i\sqrt{3},i\sqrt{3},3-2i\sqrt{3},3+2i\sqrt{3}\right\}$	0.5
2) لدينا $z_A=i\sqrt{3},\ z_B=-i\sqrt{3},\ z_c=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=3-2i\sqrt{3}$ ▪ تبيان أن النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$: لدينا : $\Omega A=\lvert z_A-z_\Omega\rvert=\lvert i\sqrt{3}-3\rvert=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\Omega B=\lvert z_B-z_\Omega\rvert=\lvert -i\sqrt{3}-3\rvert=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\Omega C=\lvert z_C-z_\Omega\rvert=\lvert 3+2i\sqrt{3}-3\rvert=\lvert 2i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\Omega D=\lvert z_D-z_\Omega\rvert=\lvert 3-2i\sqrt{3}-3\rvert=\lvert -2i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$ ومنه النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega=3)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$	0.5
3) لدينا النقطة E هي نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O: أي $z_E=-3+2i\sqrt{3}$	
أ) اثبات أن $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$: أي $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$ $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$ ومنه $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{2}{4}-i\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$	0.5
▪ استنتاج طبيعة المثلث BEC: لدينا : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $\dfrac{BC}{BE}=1$ ومنه $BC=BE$ و $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ أي أن المثلث BEC متقايس الأضلاع	0.25
ب) تبيان أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B و يحول النقطة E الى النقطة C: لدينا : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_E-z_B\right)$ أي $a=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه يوجد دوران R مركزه B ويحول النقطة E الى النقطة C	0.5

	زاويته $\theta=-\frac{\pi}{3}$
	4) لدينا العبارة المركبة للتحويل S من الشكل $z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$
0.75	أ) تعيين طبيعة التحول S وعناصره المميزة : ▪ لدينا عبارة التحويل S من الشكل $z'-z_{\omega}=a\left(z-z_{\omega}\right)$ حيث : $a=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_{\omega}=-i\sqrt{3}$ ▪ لدينا : $\|a\|=\left\|2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\|=2$ ومنه S تشابه مستوي مباشر نسبته $\|a\|=2$ وزاويته $\theta=\arg(a)=-\frac{\pi}{3}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $z_{\omega}=-i\sqrt{3}=z_B$ أي مركزه النقطة B
0.5	ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ ▪ لدينا : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ يعني $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$ ومنه $\|z-3\|=2\sqrt{3}$ أي $\Omega M=2\sqrt{3}$ وبالتالي المجموعة المطلوبة (E) هي الدائرة (C) ذات المركز $\Omega\left(z_{\Omega}=3\right)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$
0.5	ج) تعيين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية : صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها Ω' صورة Ω بالتحويل S ونصف قطرها $r'=2r=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ ▪ لدينا : $z_{\Omega'}+i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(z_{\Omega}+i\sqrt{3}\right)$ ▪ أي $z_{\Omega'}+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)$ ومنه $z_{\Omega'}=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)-i\sqrt{3}=3+i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}=6-3i\sqrt{3}$ مركز الدائرة $(E')=(C')$ هو $\Omega'\left(6-3i\sqrt{3}\right)$ و نصف قطرها $r'=4\sqrt{3}$
	E A C (E) Ω B D Ω' (E') -6 -4 -2 2 4 6 8 10 12 14 16 18 4 2 -2 -4 -6 -8 -10 -12

التمرين الثالث :	04.5 نقطة
لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$	
1) حساب u_2 ، u_1 و u_3 : لدينا : $u_1\times u_3=u_2^2$ لان u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3. ومنه : $u_2^2=256$ يكافئ $u_2=16$ أو $u_2=-16$ وبالتالي $u_2=16$ (لان حدود المتتالية موجبة)	0.25
وبالتالي لدينا : $\begin{cases} u_1+32+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=68 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ إذن u_1 و u_3 هما حلي للمعادلة $x^2-68x+256=0$ حساب المميز $\Delta=(-68)^2-4\times256=3600$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{68-60}{2}=4$ و $x_1=\frac{68+60}{2}=64$ **بما أن المتتالية متزايدة فان $u_1=4$ و $u_3=64$**	2×0.25
حساب الأساس q: $q=\frac{16}{4}=4$	0.25
2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n: لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}=4\times4^{n-1}=4^n$ أي $u_n=4^n$	0.25
3) حساب كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$ بدلالة n: لدينا : $S_n=u_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=4\times\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)=-\frac{4}{3}(1-4^n)=\frac{4}{3}\times4^n-\frac{4}{3}$ $S_n=\frac{4}{3}\times4^n-\frac{4}{3}$	0.5
▪ **حساب الجداء :** $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n=4\times4^2\times...\times4^n=4^{1+2+...+n}$ أي $P_n=4^{\frac{n}{2}(1+n)}$	0.5
4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n : لدينا : $7^0\equiv1[5]$ $7^1\equiv2[5]$ $7^2\equiv4[5]$ $7^3\equiv3[5]$ $7^4\equiv1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P=4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :	2×0.5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3

0.5	ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5: لدينا : $2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{1436}\equiv 1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436}\equiv 1[5]$ و $49^{2n+1}\equiv (7^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1}\equiv 7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1}\equiv 4[5]$ وكذلك لدينا : $5n-3\equiv -3[5]$ ومنه $5n-3\equiv 2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 1+4+2[5]$ أي $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5 هو 2
0.5	ج) حساب S_n' بدلالة n: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+...+\ln 4^n\right]=\frac{1}{\ln 2}\ln\left(4\times 4^2\times...\times 4^n\right)$ أي $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times\ln P_n=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 4^{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{1}{\ln 2}\times\ln(4)^{\frac{1}{2}\times(n^2+n)}$ ومنه : $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times(n^2+n)\times\ln 2=n^2+n$ أي $S_n'=n^2+n$
0.25	▪ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$: $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ ومنه $n+5n^2+1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$ وبالتالي $n\equiv 5\alpha+4\ ,\ (\alpha\in\mathbb{N})$
07 نقاط	**التمرين الرابع**
	I. لدينا الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=2x^2+1-\ln\lvert x\rvert$
4×0.25	**1)** دراسة تغيرات الدالة g: ▪ حساب النهايات : ▪ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+1-\ln\lvert x\rvert\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+1-\ln(-x)\right)$ أي $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(2x+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}\right)=+\infty$ لان $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x}=0$ ▪ $\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2+1-\ln\lvert x\rvert\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2+1-\ln(-x)\right)=+\infty$ ▪ $\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+1-\ln\lvert x\rvert\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+1-\ln(x)\right)=+\infty$ ▪ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2+1-\ln\lvert x\rvert\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2+1-\ln(x)\right)$ ▪ أي $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
0.25	▪ حساب المشتقة : $g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$
0.25	▪ دراسة اشارة المشتقة $g'(x)$:



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

0.5

▪ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$

0.5

2) استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	

.II لدينا f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

4×0.25

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2-\frac{\ln(-x)}{-x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(2x-2+\frac{\ln(-x)}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{\ln|x|}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

0.25

2) حساب المشتقة $f'(x)$:

$$f'(x)=2+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln|x|}{x^2}=\frac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$ أي $$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

اشارة المشتقة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

0.5

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2×0.25

3) تبيان أن المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-2+\frac{\ln|x|}{x}-2x+2\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}$

أي $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\ln(-x)}{-x}\right]=0$

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-2+\frac{\ln|x|}{x}-2x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=2x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$

0.5

- **دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم $(\Delta): y=2x-2$:**

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y=2x-2+\frac{\ln|x|}{x}-2x+2=\frac{\ln|x|}{x}$

$f(x)-y=0$ يعني $\frac{\ln|x|}{x}=0$ ومنه $\ln|x|=0$ و $x\neq 0$

$\ln|x|=0$ يعني $|x|=1$ ومنه إما $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

0.25

4) حساب $f(-x)+f(x)$:

- لدينا :

$$f(-x)+f(x)=-2x-2+\frac{\ln|x|}{-x}+2x-2+\frac{\ln|x|}{x}=-4-\frac{\ln|x|}{x}+\frac{\ln|x|}{x}=-4=2(-2)$$

الاستنتاج: النقطة $\omega(0;-2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

0.5

5) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0.4<\alpha<-0.3$:

- لدينا : $f(1)=2(1)-2+\frac{\ln|1|}{1}=0$ ومنه 1 حل للمعادلة $f(x)=0$
- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.4<\alpha<-0.3$:

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-0.4;-0.3]$ ولدينا :

$f(-0.4)=2(-0.4)-2+\frac{\ln|-0.4|}{-0.4}=-0.51$ و

$f(-0.3)=2(-0.3)-2+\frac{\ln|-0.3|}{-0.3}=1.41$

ومنه $f(-0.4)\times f(-0.3)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.4<\alpha<-0.3$

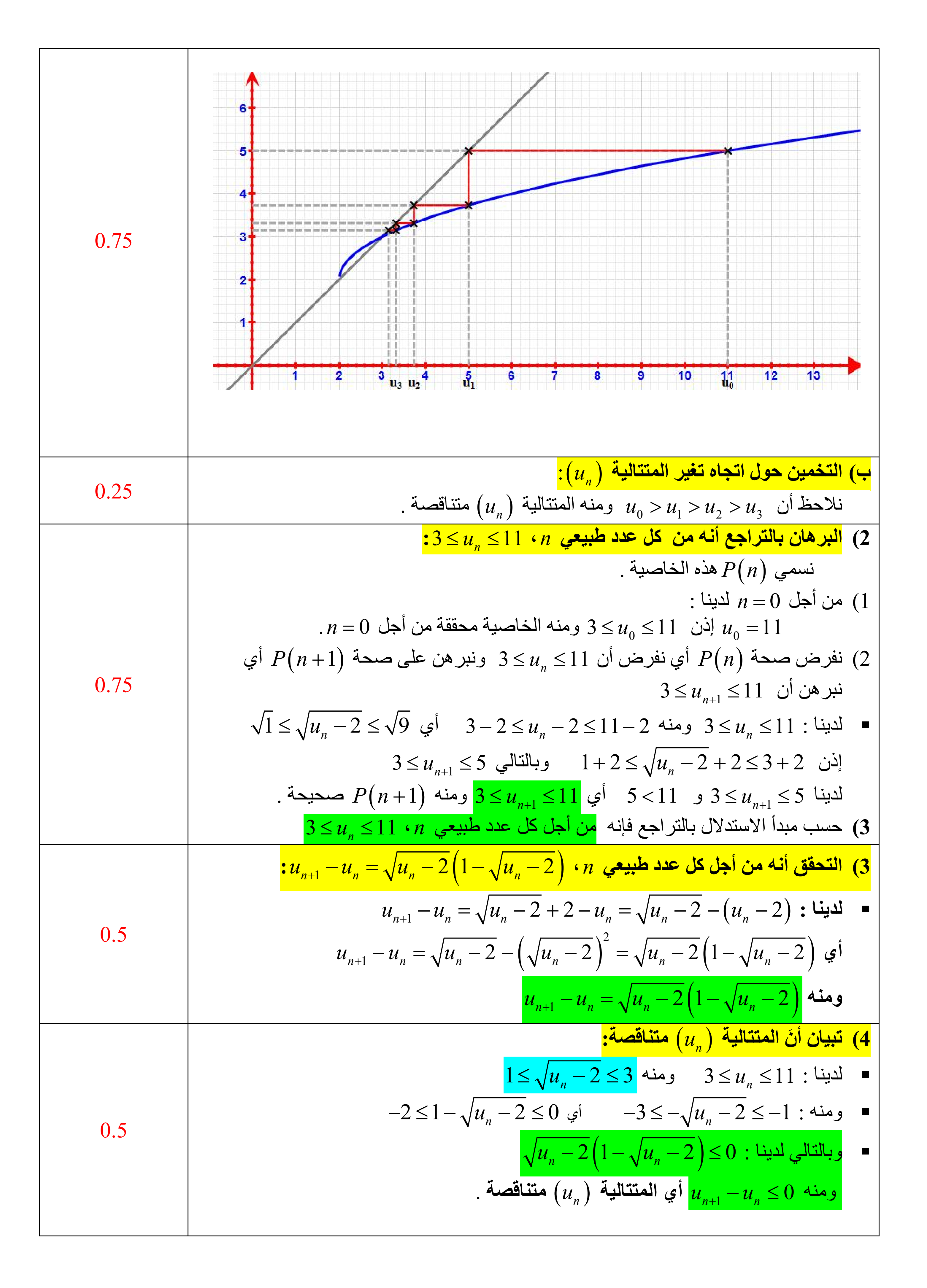
6) الرسم :	0.5
III. ليكن λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$. **1) حساب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=\lambda, x=1$.** لدينا : $A(\lambda)=\int_1^\lambda \left(f(x)-(2x-2)\right)dx=\int_1^\lambda \left(2x-2+\frac{\ln x}{x}-2x+2\right)dx$ لأنه من أجل $x\in[1;\lambda]$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ). أي $A(\lambda)=\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^\lambda=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2 us$ وبالتالي $A(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\times 4cm^2=2(\ln\lambda)^2 cm^2$	0.5
2) تعيين قيمة λ بحيث يكون $A(\lambda)=2cm^2$: $A(\lambda)=2cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2 cm^2=2cm^2$ ومنه $(\ln\lambda)^2=1$ إما $\ln\lambda=-1$ ومنه $\lambda=e^{-1}$ (مرفوض لان $\lambda>1$) أو $\ln\lambda=1$ ومنه $\lambda=e$ (مقبول)	0.25





التصحيح	التنقيط
التمرين الأول	**04.5 نقطة**
لدينا : $A(3;1;0), B(1;2;0), C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب **1) أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$:** لدينا : $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$ إذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2\times2+(-1)\times0+1\times0=4$ أي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=4$	3×0.25
استنتاج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$: لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$ و لدينا : $BA=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ و $BC=\sqrt{(2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$ ومنه : $4=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{ABC}$ أي $\cos\widehat{ABC}=\frac{4}{5}$ ولدينا كذلك : $\cos^2\widehat{ABC}+\sin^2\widehat{ABC}=1$ أي $\frac{16}{25}+\sin^2\widehat{ABC}=1$ ومنه $\sin^2\widehat{ABC}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$ وبالتالي $\sin\widehat{ABC}=\frac{3}{5}$	2×0.25
ب) حساب مساحة المثلث ABC : لدينا : $S_{ABC}=\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$ $S_{ABC}=\frac{3}{2}$	0.5
2) تبيان أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC) : لدينا : $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{BA}=1\times2+2\times(-1)+(-2)\times0=2-2=0\\\vec{n}.\overrightarrow{BC}=1\times2+2\times(0)+(-2)\times1=2-2=0\end{cases}$ ومنه $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ▪ **تعيين معادلة ديكارتية للمست وي (ABC) :** معادلة للمستوي (ABC) من الشكل : $x+2y-2z+d=0$ لتعيين قيمة d نعوض باحداثيات النقطة $B(1;2;0)$ في المعادلة نجد : $1+2\times2-2\times0+d=0$ أي $d=-5$ **معادلة للمستوي (ABC) : $x+2y-2z-5=0$**	3×0.25
3) تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه: ▪ لدينا : $d(D;(ABC))=\frac{\|0+2(0)-2m-5\|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}}=\frac{\|-2m-5\|}{\sqrt{9}}=\frac{\|2m+5\|}{3}$ أي $d(D;(ABC))=\frac{2m+5}{3}$ لان m عدد حقيقي موجب **ومنه $d(D;(ABC))\neq0$ أي أن $ABCD$ رباعي وجوه**	0.25

▪ تبيان أن حجمه $V_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}$: لدينا : $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2m+5}{3}=\frac{2m+5}{6}$	0.25
4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.	
أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب m فإن (S_m) سطح كرة : لدينا : $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$ يكافئ $x^2+y^2+(z-m)^2-m^2+m^2-9=0$ ومنه : $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ **ومنه (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ ونصف قطرها $R=3$**	2×0.25
ب) تعيين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m): (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D,(ABC))=3$ ومنه $\frac{2m+5}{3}=3$ لأن $d(D;(ABC))=\frac{2m+5}{3}$ أي $2m+5=9$ ومنه $2m=4$ **وبالتالي $m=2$**	0.5
ج) كتابة معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m): (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_2) التي مركزها $D(0;0;2)$ معادلة للمستوي (P) من الشكل $x+2y-2z+d'=0$ (P) مستوي مماس لـ (S_2) يعني $\frac{\|-4+d'\|}{3}=3$ ومنه $\|-4+d'\|=9$ إما $d'-4=9$ ومنه $d'=13$ أو $d'-4=-9$ ومنه $d'=-5$ **معادلة للمستوي (P) هي $x+2y-2z+13=0$** المستوي الآخر هو المستوى (ABC) معادلته هي $x+2y-2z-5=0$	0.5
التمرين الثاني	**04.5 نقطة**
(u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases}u_0=11\\u_{n+1}=\sqrt{u_n-2}+2\end{cases}$	
1) أ) تمثيل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0:	

 	0.75
ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): نلاحظ أن $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .	0.25
2) البرهان بالتراجع أنه من كل عدد طبيعي n، $3 \le u_n \le 11$: نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1) من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 11$ إذن $3 \le u_0 \le 11$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$. 2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $3 \le u_n \le 11$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $3 \le u_{n+1} \le 11$ ▪ لدينا : $3 \le u_n \le 11$ ومنه $3-2 \le u_n - 2 \le 11-2$ أي $\sqrt{1} \le \sqrt{u_n - 2} \le \sqrt{9}$ إذن $1+2 \le \sqrt{u_n-2}+2 \le 3+2$ وبالتالي $3 \le u_{n+1} \le 5$ لدينا $3 \le u_{n+1} \le 5$ و $5 < 11$ أي $3 \le u_{n+1} \le 11$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3 \le u_n \le 11$	0.75
3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$: ▪ **لدينا :** $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} + 2 - u_n = \sqrt{u_n - 2} - (u_n - 2)$ أي $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} - \left(\sqrt{u_n - 2}\right)^2 = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$ **ومنه** $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$	0.5
4) تبيان أنّ المتتالية (u_n) متناقصة: ▪ لدينا : $3 \le u_n \le 11$ ومنه $1 \le \sqrt{u_n - 2} \le 3$ ▪ ومنه : $-3 \le -\sqrt{u_n - 2} \le -1$ أي $-2 \le 1 - \sqrt{u_n - 2} \le 0$ ▪ وبالتالي لدينا : $\sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right) \le 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \le 0$ **أي المتتالية (u_n) متناقصة .**	0.5

0.5	**5) استنتاج مما سبق أن المتتالية (u_n) متقاربة :** ▪ (u_n) متتالية محدودة من الأسفل بالعدد 3 وهي متناقصة فهي متقاربة . ❖ **تعيين نهايتها :** نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ إذن لدينا : $L=\sqrt{L-2}+2$ ومنه $L-2=\sqrt{L-2}$ وبالتالي $(L-2)^2 = L-2$ أي $(L-2)^2-(L-2)=0$ ومنه $(L-2)\left[(L-2)-1\right]=0$ أي $(L-2)(L-3)=0$ وبالتالي : المعادلة تقبل حلين هما $L=3$ أو $L=2$ **وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ لان $3\le u_n\le 11$**
0.5	**6) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$:** ▪ لدينا : $3\le u_{n+1}\le 11$ ومنه $0\le u_{n+1}-3\le 8$ أي $(1)...0\le u_{n+1}-3$ ▪ ولدينا : $u_{n+1}-3=\sqrt{u_n-2}+2-3=\sqrt{u_n-2}-1$ أي $u_{n+1}-3=\dfrac{\left(\sqrt{u_n-2}-1\right)\left(\sqrt{u_n-2}+1\right)}{\sqrt{u_n-2}+1}=\dfrac{u_n-2-1}{\sqrt{u_n-2}+1}=\dfrac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1}$ ولدينا : $3\le u_n$ ومنه $1\le u_n-2$ أي $2\le\sqrt{u_n-2}+1$ وبالتالي : $\dfrac{1}{\sqrt{u_n-2}+1}\le\dfrac{1}{2}$ ومنه $(2)...\dfrac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1}\le\dfrac{1}{2}(u_n-3)$ من (1) و (2) نستنتج أن : $0\le u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$
0.5	**ب) استنتاج أن : $0\le u_n-3\le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n:** - لدينا : $u_1-3\le\frac{1}{2}(u_0-3)$ $u_2-3\le\frac{1}{2}(u_1-3)$ $u_3-3\le\frac{1}{2}(u_2-3)$ . . . $u_n-3\le\frac{1}{2}(u_{n-1}-3)$ ومنه : $(u_1-3)(u_2-3)(u_3-3)\times\ldots\times(u_n-3)\le\frac{1}{2}(u_0-3)\times\frac{1}{2}(u_1-3)\times\ldots\times\frac{1}{2}(u_{n-1}-3)$

ومنه $u_n-3\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-3)$ إذن : $0\le u_n-3\le 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$	
▪ **تعيين نهاية المتتالية (u_n):** لدينا : $0\le u_n-3\le 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3)=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$	0.25
التمرين الثالث :	**04.5 نقطة**
1) حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ - حساب المميز : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times4=12-16=-4=(2i)^2$ - المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i,\ z_2=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ مجموعة الحلول $S=\left\{\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}+i\right\}$	3×0.25
2) كتابة الحلول على الشكل المثلثي: - لدينا : $z_1=\sqrt{3}+i$ حساب الطويلة : $\lvert z_1\rvert=\lvert\sqrt{3}+i\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ تعيين عمدة للعدد $z_1=\sqrt{3}+i$: نضع $\theta_1=\arg(z_1)$ لدينا $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$ اي $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	2×0.25
- **كتابة $z_2=\sqrt{3}-i$ على الشكل المثلثي :** $z_2=\overline{z_1}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	0.25
3) لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i,\ z_B=\sqrt{3}-i,\ z_C=-\sqrt{3}-i$	
أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع : $ABCD$ متوازي أضلاع يعني $z_{\overrightarrow{AD}}=z_{\overrightarrow{BC}}$ أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه	

0.25	$z_D = z_C - z_B + z_A = -\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i = -\sqrt{3} + i$ أي $z_D = -\sqrt{3} + i$
3×0.25	**ب) كتابة الأعداد z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي :** - لدينا : $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}},\ z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ولدينا : $z_C = -z_A = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ أي $z_C = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$
$0.25 + 0.5$	**ج) تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_C}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_A}{2}\right)^n$ حقيقيا :** - لدينا : $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^n = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^n \times \left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^n \times \left(\frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2}\right)^n$ أي $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{6}} \times e^{-i\frac{n\pi}{6}} \times e^{i\frac{7n\pi}{6}} = e^{i\frac{7n\pi}{6}}$ $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^n \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي يعني $\sin\frac{7n\pi}{6} = 0$ ومنه $\frac{7n\pi}{6} = k\pi$ أي $7n\pi = 6k\pi$ إذن $7n = 6k$ مع $k = 7\alpha$ وبالتالي $n = 6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$
	4) لدينا العبارة المركبة للتحويل S من الشكل : $z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} + 3i$
3×0.25	**أ) تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة :** لدينا S من الشكل : $z' = az + b$ حيث $a = 1 - i\sqrt{3}$ ، $b = -\sqrt{3} + 3i$ إذن : $\lvert a\rvert = \lvert 1 - i\sqrt{3}\rvert = 2$ ومنه S تشابه مستوي مباشر نسبته $\lvert a\rvert = 2$ وزاويته $\theta = \arg(a) = \arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ لأن $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{1 - 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{i\sqrt{3}} \times \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = \sqrt{3} + i$ أي $z_\Omega = \sqrt{3} + i = z_A$ مركز التشابه هو النقطة $A\left(\sqrt{3} + i\right)$
0.25	**ب) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $(z - z_A)\left(\overline{z - z_A}\right) = z_C\overline{z_C}$** - **لدينا :** $(z - z_A)\left(\overline{z - z_A}\right) = \lvert z - z_A\rvert^2$ و $z_C\overline{z_C} = \lvert z_C\rvert^2 = 4$ $(z - z_A)\left(\overline{z - z_A}\right) = z_C\overline{z_C}$ يكافئ $\lvert z - z_A\rvert^2 = 4$

ومنه $\left|z-z_A\right|=2$ أي $AM=2$ وبالتالي المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $A\left(\sqrt{3}+i\right)$ ونصف قطرها $r=2$	
ج) تعيين (Γ')صورة (Γ) بالتحويل S : (Γ') هي دائرة مركزها $A\left(\sqrt{3}+i\right)$ لان $S(A)=A$ ونصف قطرها $r'=2r=2\times2=4$	0.25
الرسم:	
التمرين الرابع :	**06,5 نقطة**
.I لدينا لدالة العددية g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$	
1) دراسة تغيرات الدالة g :	
▪ حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right]=-\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\ln(x+1)\right]=-\infty\end{cases}$	0.25
▪ حساب المشتقة: $g'(x)=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-x-1}{(x+1)^2}=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$ من أجل $x\in]0;+\infty[$	0.25
▪ اشارة المشتقة :	0.25
▪ جدول تغيرات الدالة g:	0.5
2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$: إشارة $g(x)$ سالبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ أي $g(x)<0$ من أجل $x\in]0;+\infty[$	0.25

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	‖ $\qquad$ $-$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	‖ $\qquad$ $-$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

	.II لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^{x}+1)$
0.25	**1) حساب النهايات :** ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\ln(e^{x}+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{x}+1)}{e^{x}}=1$ يمكن وضع $e^{x}=X$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(X+1)}{X}=1$
0.25	▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}\ln(e^{x}+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}\ln e^{x}(1+e^{-x})\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$
$0.25+0.25$	▪ **التفسير الهندسي للنتيجتين :** المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين $y=1$ عند $-\infty$ و $y=0$ عند $+\infty$
0.5	**2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$:** لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\ln(e^{x}+1)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(-\ln(e^{x}+1)+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\right)$ ومنه : $f'(x)=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln(e^{x}+1)\right)=e^{-x}\times g(e^{x})$ أي $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$
0.5	**3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** من أجل $x\in\mathbb{R}$ لدينا : $e^{x}>0$ أي $e^{x}\in\left]0;+\infty\right[$ من أجل $x\in\left]0;+\infty\right[$ لدينا : $g(x)<0$ ومنه $g(e^{x})<0$ إذن من أجل $x\in\mathbb{R}$ لدينا : $e^{-x}\times g(e^{x})<0$ **وبالتالي : $f'(x)<0$ من أجل $x\in\mathbb{R}$ ومنه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$**
0.5	**جدول تغيرات الدالة f :** x : $-\infty$ ... $+\infty$ $f'(x)$: $-$ $f(x)$: 1 ↘ 0

0.75	▪ الرسم :
0.5	4) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)+f(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$: - لدينا : $f'(x)+f(x)=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ ومنه $f'(x)+f(x)=\frac{1}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}$
0.75	ب) تعيين دالة أصلية F للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 : - لدينا : $f'(x)+f(x)=\frac{1}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}$ ومنه $f(x)+F(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)+C$ أي $F(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)-f(x)+C$ ومنه : $F(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)-e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)+C$ وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F حيث : $F(x)=x-\left(1+e^{-x}\right)\ln\left(e^x+1\right)+C$ مع $C\in\mathbb{R}$
0.25	- تعيين الدالة الأصلية F حيث : $F(0)=0$: $F(0)=0$ يعني $0-\left(1+e^{-0}\right)\ln\left(e^0+1\right)+C=0$ ومنه $-2\ln 2+C=0$ أي $C=2\ln 2$ وبالتالي $F(x)=x-\left(1+e^{-x}\right)\ln\left(e^x+1\right)+2\ln 2$
0.5	ج) حساب المساحة S : بما أن الدالة f مستمرة وموجبة على المجال $[0;\ln 2]$ فإن : $S=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^{\ln 2}$ أي $S=F(\ln 2)-F(0)$ ومنه $S=\ln 2-\left(1+e^{-\ln 2}\right)\ln\left(e^{\ln 2}+1\right)+2\ln 2-0=3\ln 2-\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln 3$

	إذن $S=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3=3\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3\right)=3\left(\ln 2-\ln\sqrt{3}\right)=3\ln\frac{2}{\sqrt{3}}uA$ ومنه $S=0.43cm^2$





الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي مقاطعة ورقلة 02

الشعبة : علوم تجريبية دورة ماي 2015

اختبار في مادة الرياضيات المدة : 03 سا و 30د

على المترشح اختيار احد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05نقاط)

1°) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+5=0$.

2°) نعتبر في المستوي المركب المنسوب على معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$

النقط I ، B ، A التي لواحقها على الترتيب $z_1=1-2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_A=2+\overline{z_1}$.

أ/ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب : $z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.

ب/ اكتب العدد المركب Z على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAB .

جـ / احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

3°) ا / لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1);(C;1)\}$ احسب z_G لاحقة النقطة G .

ب/ عين طبيعة المجموعة (Γ_1) مجموعةالنقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$2\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

جـ / عين طبيعة المجموعة (Γ_2) مجموعةالنقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{M}A-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$$

التمرينالثاني:(05نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1- احسب الحدود u_2,u_3،و u_4 (تدوّر النتائج الى 10^{-2}) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- ا- بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3- $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n=u_n-n$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين حدها العام v_n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

4- نضع من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_2+.......+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_n$

$S'_n=u_1+u_2+....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$ احسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n\to+\infty}T_n$

التمرين الثالث (04نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o\,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$: نعتبر النقط: $A(3,2,1)$; $B(3,5,4)$ و $C(0,5,1)$

1- بين ان المثلث ABC متقايس الأضلاع

2- تحقق ان الشعاع $\vec{n}(1,1,-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له

3- ا- عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC)

جـ - تحقق ان النقطة $F(4,6,0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم احسب حجم رباعي الوجوه FABC

4- بين ان المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين

5- ا- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$

ب- عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي : $g(x)=\frac{-x+1}{-x+3}+\ln(-x+3)$

1) احسب نهايات g عند اطراف مجال تعريفها .

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,5;1,7[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $f(x)=(x-1)\ln(-x+3)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1°) أ / - احسب نهايات f عند اطراف مجال تعريفها .

ب /- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2°) بين ان $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$ ثم استنتج حصرا لــ $f(\alpha)$.

3°) حل في المجال $]-\infty;3[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty,3[$

4°) احسب $f(-2)$ و $f(-3)$ ثم ارسم بدقة المنحنى (C_f) .

5°) F دالة عددية على المجال $]-\infty,3[$ كمايلي: $F(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}\right)\ln(-x+3)$

تحقق ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,3[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (06 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;4;0)$، $B(0;5;0)$، $C(0;0;5)$ ، $D(-2;-6;5)$ ، $E(-4;0;-3)$ والشعاع $\vec{n}(1;3;3)$

1.بين أن النقط A, B, C تعيّن مستو (ABC)،تأكد أن $\vec{n}$ شعاعه الناظمي ثم اكتب معادلة ديكارتية له

2 . ا / برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين .

ب / عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ثم بين أن $OI=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

جـ / بين أن $\vec{OC}$ عمودي على المستوي (AOB)



د/ استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

3. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

4 . ا/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة $[DE]$.

جـ / تحقق ان النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q) .

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

التمرين الثاني:(05نقط)

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها

على الترتيب : $Z_a=i$, $Z_b=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $Z_c=-1$

1- نعتبر التحويل النقطي (S) المعرف بـ : $Z'=2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z+1-i$

ما طبيعة التحويل (S) وما عناصره المميزة .

2- - عين لواحق النقط $A';B'$ و C' صور النقط A, B و C بالتحويل (S)

3- أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة : $\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$

ب) عين لاحقة النقطة G' مرجح الجملة $\{(A',3);(B',1);(C',-2)\}$

جـ) تأكد أن $G'=S(G)$ ، ماذا تستنتج ؟

4- T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M(z')$ حيث : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

ا- بين أن : $\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$ واستنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

ب- عين لواحق النقط : E,D و F صور النقط B,A و C بالتحويل T

جـ - بين أن المثلثين ABC و EDF متقايسان .

التمرين الثالث (09نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يلي $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1- احسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف ثمّ ادرس اتجاه تغيرات الدالة g

2- شكل جدول تغيرات g ثم علّل وجود عدد حقيقي α حيث $-0.38\prec\alpha\prec-0.36$ يحقق $g(\alpha)=0$

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على R

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

(c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 ا- بين انه من اجل كل x من R: $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

ب- بين ان $f(\alpha)=2\alpha+3+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- بين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين إحداثيتها

4- ا- بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=2x+1$ بجوار $+\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي للبيان (C_f) والمستقيم (Δ)

جـ - أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم السابق وعلى المجال $]-1.5;+\infty[$ يعطى $f(-1.5)=4.72$

5- لتكن الدالة h المعرفة على R كمايلي : $h(x)=f(x^2e^x)$

باستعمال مشتق دالة مركبة . استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

6- لتكن الدالة k المعرفة على R كما يلي $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

ا- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة k دالة أصلية للدالة $x\to-xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على R

الموضوع الأول

التمرين الأول : $Z^2-2Z+5=0$

1) $\Delta=-16$ حلا المعادلة هما: (1)

$Z_1=\frac{2+i\sqrt{16}}{2}=1+2i$ و $Z_2=1-2i$

أ/ $Z_I=1-2i$ ، $Z_B=-3$ ، $Z_A=2+\overline{Z_I}$

$Z_A=3+2i$

$Z=\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}=\frac{1-2i-3-2i}{1-2i+3}=\frac{-2-4i}{4-2i}$

$Z=\frac{-1-2i}{2-i}=\frac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-2-i-4i+2}{4+1}$

$Z=\frac{-5i}{5}$ ومنه : $Z=-i$ (0.5)

ب) $Z=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ (0.5)

$\left|\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}\right)=\frac{-\pi}{2}$

$AI=BI$ و $(\vec{IB};\vec{IA})=\frac{-\pi}{2}$ (0.5)

AIB قائم في I ومتساوي الساقين

ج) لدينا $h(A;2)$ تحاكي و $h(I)=C$

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z'-Z_A=2(Z-Z_A)$

$h(I)=C$ ومنه : $Z_C-Z_A=2(Z_I-Z_A)$

$Z_C=2Z_I-Z_A$

$Z_C=2-4i-3-2i=-1-6i$

$Z_C=-1-6i$ (0.5)

3) G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ (0.5)

أ) $Z_G=\frac{Z_A-Z_B+Z_C}{1-1+1}=3+2i+3-1-6i=5-4i$

ب) $2\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|==\|\vec{MA}+\vec{MB}\|$

لتكن H منتصف $[AB]$

$2\|(1-1+1)\vec{MG}\|=\|(1+1)\vec{MH}\|$

$2MG=2MH$ ومنه : $MG=MH$ (0.75)

مجموعة النقط (Γ_1) محور القطعة $[GH]$

ج) $\|\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\|=4\sqrt5$

$\|(1-1+1)\vec{MG}\|=4\sqrt5$ ومنه $MG=4\sqrt5$ (0.75)

مجموعة النقط (Γ_2) دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=4\sqrt5$

التمرين الثاني : $U_1=\sqrt e$, $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1$

1) حساب u_2,u_3,u_4 : (0.75)

$U_2=\frac{2}{3}U_1+\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}\sqrt e+\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt e+4}{3}\approx 2{,}43$

$U_3=\frac{2}{3}U_2+\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}(\frac{2\sqrt e+4}{3})+\frac{5}{3}=\frac{4\sqrt e+23}{9}\approx 3{,}28$

$U_4=\frac{2}{3}U_3+\frac{3}{3}+1=\frac{2}{3}(\frac{4\sqrt e+23}{9})+2=\frac{8\sqrt e+100}{9}\approx 12{,}58$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\ge1$: $U_n\le n+3$ (1)

* من اجل $n=1$: $U_1=\sqrt e\approx1{,}6$ ومنه $U_1\le1+3$ (محققة)

*نفرض أن $U_n\le n+3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1}\le n+4$

لدينا : $U_n\le n+3$ ومنه: $\frac{2}{3}U_n\le\frac{2}{3}(n+3)$

إذن: $\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2}{3}(n+3)+\frac{1}{3}n+1$

وبالتالي: $U_{n+1}\le n+3$ ومنه $U_{n+1}\le n+3\le n+4$

ومنه : $U_{n+1}\le n+4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة

*الإستنتاج : من أجل كل $n\ge1$: $U_n\le n+3$

ب) $U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{3}n+1-\frac{1}{3}U_n=\frac{1}{3}(n+3-U_n)$ (0.25)

لدينا : $U_n\le n+3$ ومنه: $n+3-U_n\ge0$

أي: $\frac{1}{3}(n+3-U_n)\ge0$ ومنه: $U_{n+1}-U_n\ge0$

ومنه: (U_n) متزايدة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n=U_n-n$ (1)

لدينا : $V_{n+1}=U_{n+1}-(n+1)$

$V_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}U_n-\frac{2}{3}n$

أي : $V_{n+1}=\frac{2}{3}(U_n-n)$ ؛ $V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n$

(V_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1=U_1-1=\sqrt e-1$

ب) عبارة V_n : $V_n=V_1\times q^{n-1}$ (0.25)

$V_n=(\sqrt e-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ب) عبارة U_n : $V_n=U_n-n$ (0.25)

ومنه $U_n=V_n+n$ إذن : $U_n=(\sqrt e-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$

تابع التمرين الثاني:

4) **حساب:** $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_2+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_n$

لدينا : $V_n=V_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_1\left(\frac{2}{3}\right)^1+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+..........+\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}\right]$$

$$S_n=V_1\left(\frac{2}{3}\right)\left[1+\left(\frac{4}{9}\right)+..........+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

0.5

$S_n=\frac{2}{3}V_1\left[1\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ أي $\boxed{S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$

حساب: $S'_n=U_1+U_2+..........+U_n$

لدينا: $U_n=V_n+n$ **ومنه:**

$$S'_n=(V_1+1)+(V_2+2)+..........+(V_n+n)$$

$$S'_n=(V_1+V_2+....+V_n)+(1+2+...+n)$$

$$S'_n=V_1\times\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{n}{2}(1+n)$$

$$S'_n=(\sqrt{e}-1)\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n}{2}(1+n)$$

0.5

$$\boxed{S'_n=3(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}}$$

0.25

$$T_n=\frac{S'_n}{n^2}=\frac{3}{n^2}(\sqrt{e}-1)\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$$

0.25

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}}$$

التمرين الثالث : $A(3,2,1)$ $B(3,5,4)$ $C(0,5,1)$

1) **إثبات أن** ABC **متقايس الأضلاع:**

$\vec{AB}(0,3,3)$ ، $\vec{AC}(-3,3,0)$ ، $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$$AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

0.5

$\boxed{AB=AC=BC}$ **إذن** ABC **متقايس الأضلاع**

2) **التحقق أن** $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC) **:**

0.25

$\begin{cases}\vec{n}.\vec{AB}=0+3-3=0\\ \vec{n}.\vec{AC}=-3+3+0=0\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{AC}\end{cases}$ **أي:** $\vec{n}\perp(ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)

معادلة (ABC) **:** $x+y-z+d=0$

0.5

$A(3,2,1)\in(ABC)$ **أي:** $3+2-1+d=0$ **أي:** $d=-4$ **ومنه :**

$\boxed{(ABC):x+y-z-4=0}$

3) أ) **تعيين إحداثيات** G **مركز ثقل المثلث** ABC **:**

0.25

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3},\frac{2+5+5}{3},\frac{1+4+1}{3}\right)$ **ومنه:** $\boxed{G(2,4,2)}$

ب) **التمثيل الوسيطي للمستقيم** (Δ)

لدينا $G(2,4,2)\in(\Delta)$ **و** $(\Delta)\perp(ABC)$

0.5

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ **شعاع توجيه للمستقيم** (Δ)

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=4+t\\ z=2-t\end{cases}}$$

ج) **التحقق أن** $F(4,6,0)$ **تنتمي إلى** (Δ) **:**

0.25

$(\Delta):\begin{cases}4=2+t\\ 6=4+t\\ 0=2-t\end{cases}$ **ومنه:** $(\Delta):\begin{cases}t=2\\ t=2\\ t=2\end{cases}$ t **قيمة وحيدة ومنه** $F\in(\Delta)$

حساب حجم $FABC$ **:**

لدينا (Δ) **يشمل** F **و عمودي على** (ABC) **ويمر من** G

مركز ثقل ABC **ومنه** G **المسقط العمودي لـ** F **على** (ABC)

إذن FG ارتفاع الهرم $FABC$ الذي قاعدته ABC

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\text{A}\times FG}$$

حساب A مساحة ABC : ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2+h^2=(\sqrt{18})^2$ **ومنه :** $h=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$\text{A}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG=\sqrt{(2-4)^2+(4-6)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$$

0.75

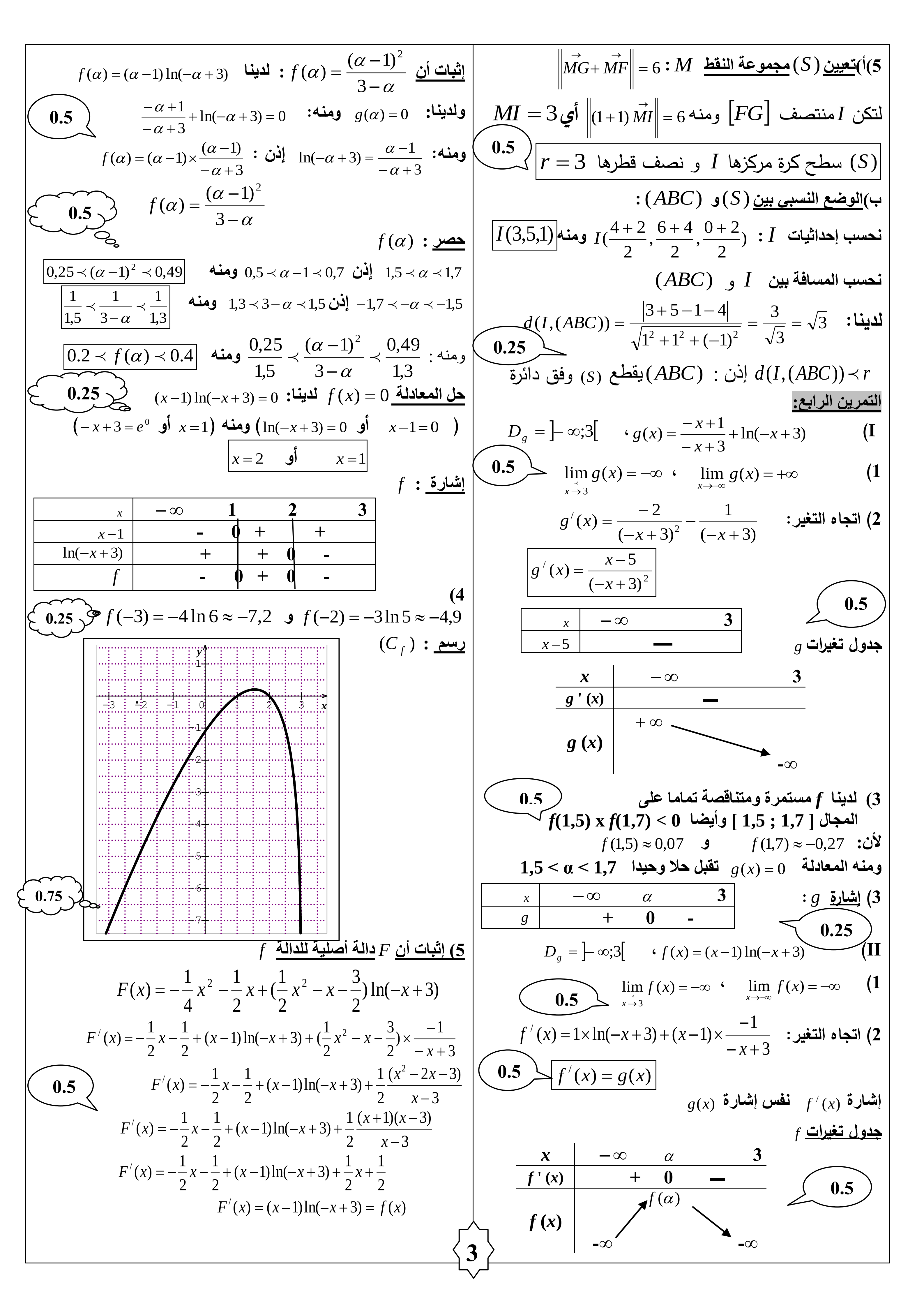
$$\boxed{V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=9}$$

4) **إثبات أن** $(FA)\perp(BC)$

0.25

$\vec{FA}(-1,-4,1)$ **و** $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$\vec{FA}.\vec{BC}=3+0-3=0$ **ومنه** $\vec{FA}\perp\vec{BC}$ **إذن** $(FA)\perp(BC)$



5) أ) **تعيين** (S) **مجموعة النقط** M : $\left\|\vec{MG}+\vec{MF}\right\| = 6$

لتكن I منتصف $[FG]$ ومنه $\left\|(1+1)\vec{MI}\right\| = 6$ **أي** $MI = 3$

0.5

(S) سطح كرة مركزها I و نصف قطرها $r = 3$

ب) الوضع النسبي بين (S) **و** (ABC) :

نحسب إحداثيات I : $I(\frac{4+2}{2},\frac{6+4}{2},\frac{0+2}{2})$ **ومنه** $I(3,5,1)$

نحسب المسافة بين I **و** (ABC)

لدينا: $d(I,(ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

0.25

$d(I,(ABC)) \prec r$ إذن : (ABC) يقطع (S) وفق دائرة

التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

1) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} g(x) = -\infty$

0.5

2) اتجاه التغير: $g'(x) = \frac{-2}{(-x+3)^2} - \frac{1}{(-x+3)}$

$g'(x) = \frac{x-5}{(-x+3)^2}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 3
$x-5$	—

0.5

جدول تغيرات g

x	$-\infty$ $\qquad$ **3**
g ' (x)	—
g (x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3) لدينا ***f*** **مستمرة ومتناقصة تماما على المجال** **] 1,5 ; 1,7 [** **وأيضا** ***f*****(1,5) x** ***f*****(1,7) < 0**

0.5

لأن: $f(1,7) \approx -0,27$ **و** $f(1,5) \approx 0,07$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** **1,5 < α < 1,7**

3) **إشارة** g :

x	$-\infty$	α	3
g	+	0	-

0.25

II) $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = -\infty$

0.5

2) اتجاه التغير: $f'(x) = 1\times\ln(-x+3) + (x-1)\times\frac{-1}{-x+3}$

0.5

$f'(x) = g(x)$

إشارة $f'(x)$ **نفس إشارة** $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	α	**3**
f ' (x)	+	**0**	—
f (x)	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

0.5

إثبات أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$: **لدينا** $f(\alpha) = (\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ **ومنه:** $\frac{-\alpha+1}{-\alpha+3} + \ln(-\alpha+3) = 0$

0.5

ومنه: $\ln(-\alpha+3) = \frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$ **إذن** : $f(\alpha) = (\alpha-1)\times\frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$

0.5

$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$

حصر : $f(\alpha)$

$1,5 \prec \alpha \prec 1,7$ **إذن** $0,5 \prec \alpha-1 \prec 0,7$ **ومنه** $0,25 \prec (\alpha-1)^2 \prec 0,49$

$-1,7 \prec -\alpha \prec -1,5$ **إذن** $1,3 \prec 3-\alpha \prec 1,5$ **ومنه** $\frac{1}{1,5} \prec \frac{1}{3-\alpha} \prec \frac{1}{1,3}$

ومنه : $\frac{0,25}{1,5} \prec \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} \prec \frac{0,49}{1,3}$ **ومنه** $0.2 \prec f(\alpha) \prec 0.4$

0.25

حل المعادلة $f(x) = 0$ **لدينا:** $(x-1)\ln(-x+3) = 0$

($x-1=0$ **أو** $\ln(-x+3)=0$) **ومنه** ($x=1$ **أو** $-x+3=e^0$)

$x=1$ **أو** $x=2$

إشارة f :

x	$-\infty$	1	2	3
$x-1$	-	0 +	+	
$\ln(-x+3)$	+	+	0 -	
f	-	0 +	0 -	

4)

0.25

$f(-2) = -3\ln 5 \approx -4,9$ **و** $f(-3) = -4\ln 6 \approx -7,2$

رسم : (C_f)

0.75

5) إثبات أن F **دالة أصلية للدالة** f

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\ln(-x+3)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\times\frac{-1}{-x+3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)}{x-3}$$

0.5

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = (x-1)\ln(-x+3) = f(x)$$

الموضوع الثاني

ألتمرين الأول :

$D(-2,-6,5)$ $C(0,0,5)$ $B(0,5,0)$ $A(3,4,0)$
$E(-4;0;-3)$

1)التحقق أن النقط C,B,A تعين مستو:

$\vec{AC}(-3,-4,5)$ و $\vec{AB}(-3,1,0)$

لدينا $(\frac{-3}{-3} \neq \frac{-4}{1})$ ومنه $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ غير مرتبطان خطيا 0.5

C,B,A ليست على استقامية فهي تشكل المستوي (ABC)

2) التحقق أن $\vec{n}(1;3;3)$ ناظمي للمستوي (ABC): 0.25

$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = -3+3+0=0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = -3-12+15=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$ أي: $\vec{n} \perp (ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;3;3)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC) : $x+3y+3z+d=0$

$A(3,4,0) \in (ABC)$ أي: $3+12+d=0$ أي: $d=-15$ ومنه :

$(ABC): x+3y+3z-15=0$ 0.5

2) أ)إثبات أن AOB متساوي الساقين: 0.5

$OA = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OB = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OA = OB$ إذن AOB متساوي الساقين

ب)حساب إحداثيات I منتصف $[AB]$

$I(\frac{3+0}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{0+0}{2})$ ومنه $I(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ 0.5

حساب OI: 0.25

$OI = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{9}{2})^2+0^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

حساب حجم $OABC$:

لدينا : $\vec{OC}(0,0,5)$ $\vec{OA}(3,4,0)$ $\vec{OB}(0,5,0)$

$\begin{cases} \vec{OC}.\vec{OA}=0 \\ \vec{OC}.\vec{OB}=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \vec{OC} \perp \vec{OA} \\ \vec{OC} \perp \vec{OB} \end{cases}$ إذن $\vec{OC} \perp (AOB)$

إذن OC ارتفاع الهرم $OABC$ الذي قاعدته AOB

$V = \frac{1}{3} \mathrm{A} \times OC$

لدينا $OC = 5$

حساب A مساحة AOB : $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times OI \times AB$

ومنه: $AB = \sqrt{10}$ $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{15}{2}$ 1

حجم رباعي الوجوه: $V = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

3)حساب المسافة بين O و (ABC) : 0.25

لدينا : $d(O,(ABC)) = \frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{19}} = \frac{15\sqrt{19}}{19}$

4)أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

لدينا $\vec{DE}(-2,6,-8)$ و $E \in (DE)$ 0.5

$(DE): \begin{cases} x=-4-2t \\ y=6t \\ z=-3-8t \end{cases}$

ب)معادلة (Q) المستوي المحوري للقطعة $[DE]$:

ليكن H منتصف $[DE]$:

$H(\frac{-4-2}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{-3+5}{2})$ ومنه $H(-3,-3,1)$

(Q) يشمل H وشعاعه الناظمي $\vec{DE}(-2,6,-8)$:

معادلته : $-2x+6y-8z+d=0$

$H \in (Q)$ أي: $6-18-8+d=0$ أي: $d=20$ ومنه :

$(Q): -2x+6y-8z+20=0$

$(Q): x-3y+4z-10=0$ 1

ج) التحقق أن $F(-1;1;\frac{7}{2}) \in Q$: 0.25

$-1-3+\frac{28}{2}-10=0$ إذن $0=0$ ومنه $F \in Q$

3)استنتاج المسافة بين F و المستقيم (DE) :

$d(F,(DE)) = FH$

$FH = \sqrt{(-3+1)^2+(-3-1)^2+(1-\frac{7}{2})^2}$

$FH = \sqrt{4+16+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}$ 0.5

التمرين الثاني : $Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z + 1 - i$

1) S **تشابه مباشر نسبته** 2 **و زاويته** $\frac{-\pi}{3}$ **ومركزه** W

لدينا: $2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}))$

0.75

$2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$

$$Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}(i\sqrt{3})}$$

$$Z_W = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(-i\sqrt{3})}{i\sqrt{3}(-i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$W(\frac{-\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{3}}{3})$

تعيين لواحق A', B', C' **بالتشابه** S :

$Z' = (1-i\sqrt{3})Z + 1 - i$

$S(A) = A'$ اي $Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})Z_A + 1 - i$

$Z_{A'} = (1-i\sqrt{3})i + 1 - i$ ومنه $\boxed{Z_{A'} = 1+\sqrt{3}}$

0.25

$S(B) = B'$ اي $Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})Z_B + 1 - i$

$Z_B = \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$

$Z_B = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i$

$Z_{B'} = (1-i\sqrt{3})(1-i) + 1 - i$

$Z_{B'} = 1 - i - i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 - i$

0.25 $\boxed{Z_{B'} = (2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})i}$

$S(C) = C'$ اي $Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})Z_C + 1 - i$

$Z_{C'} = (1-i\sqrt{3})(-1) + 1 - i$ ومنه $\boxed{Z_{C'} = (\sqrt{3}-1)i}$

3)أ) G **مرجح الجملة :** $\{(A;3),(B;1),(C;-2)\}$

0.25

$$Z_G = \frac{3Z_A + Z_B - 2Z_C}{3+1-2} = \frac{3i+1-i-2(-1)}{2}$$

0.5 $\boxed{Z_G = \frac{3}{2} + i}$

ب) G' **مرجح الجملة :** $\{(A';3),(B';1),(C';-2)\}$

$$Z_{G'} = \frac{3Z_{A'} + Z_{B'} - 2Z_{C'}}{3+1-2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3(1+\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3} + (-2-\sqrt{3})i - 2(\sqrt{3}-1)i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3+3\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+2i}{2}$$

$\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ **0.5**

ج) $S(G) = G'$ ومنه $Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})Z_G + 1 - i$

$Z_{G'} = (1-i\sqrt{3})(\frac{3}{2}+i) + 1 - i$

$Z_{G'} = \frac{3}{2} + i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{3} + 1 - i$

0.5 $\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

الاستنتاج : التشابه المباشر يحافظ عل المرجح

4) أ)إثبات أن $\vec{GM'} = \vec{MG}$

حسب علاقة شال $\vec{MM'} = 3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$

$\vec{MG} + \vec{GM'} = 3(\vec{MG} + \vec{GA}) + \vec{MG} + \vec{GB} - 2(\vec{MG} + \vec{GC})$

$\vec{GM'} = (3+1-2-1)\vec{MG} + \underbrace{3\vec{GA} + \vec{GB} - 2\vec{GC}}_{\vec{0}}$

0.5

ومنه : $\vec{GM'} = \vec{MG}$ إذن $\vec{GM'} = -\vec{GM}$

0.25 **التحويل تحاكي مركزه** G **ونسبته 1- (تناظر مركزه** G **)**

ب) تعيين لواحق F, E, D **صور** C, B, A **بالتحاكي** $T(G;-1)$:

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z' - Z_G = -(Z - Z_G)$

$T(A) = D$ **ومنه :** $Z_D - Z_G = -(Z_A - Z_G)$

$Z_D = -Z_A + 2Z_G$

0.25 $\boxed{Z_D = 3+i}$ **ومنه:** $Z_D = -i + 2(\frac{3}{2}+i) = 3+i$

$T(B) = E$ **ومنه :** $Z_E - Z_G = -(Z_B - Z_G)$

$Z_E = -Z_B + 2Z_G$

0.25 $\boxed{Z_E = 2+3i}$ **ومنه** $Z_E = -(1-i) + 2(\frac{3}{2}+i)$

$T(C) = F$ **ومنه :** $Z_F - Z_G = -(Z_C - Z_G)$

$Z_F = -Z_C + 2Z_G$

0.25 $\boxed{Z_E = 4+2i}$ **ومنه** $Z_F = -(-1) + 2(\frac{3}{2}+i)$

أ)إثبات أن المثلثين ABC **و** EDF **متقايسان :**

لدينا : $T(A) = D$ و $T(B) = E$ و $T(C) = F$

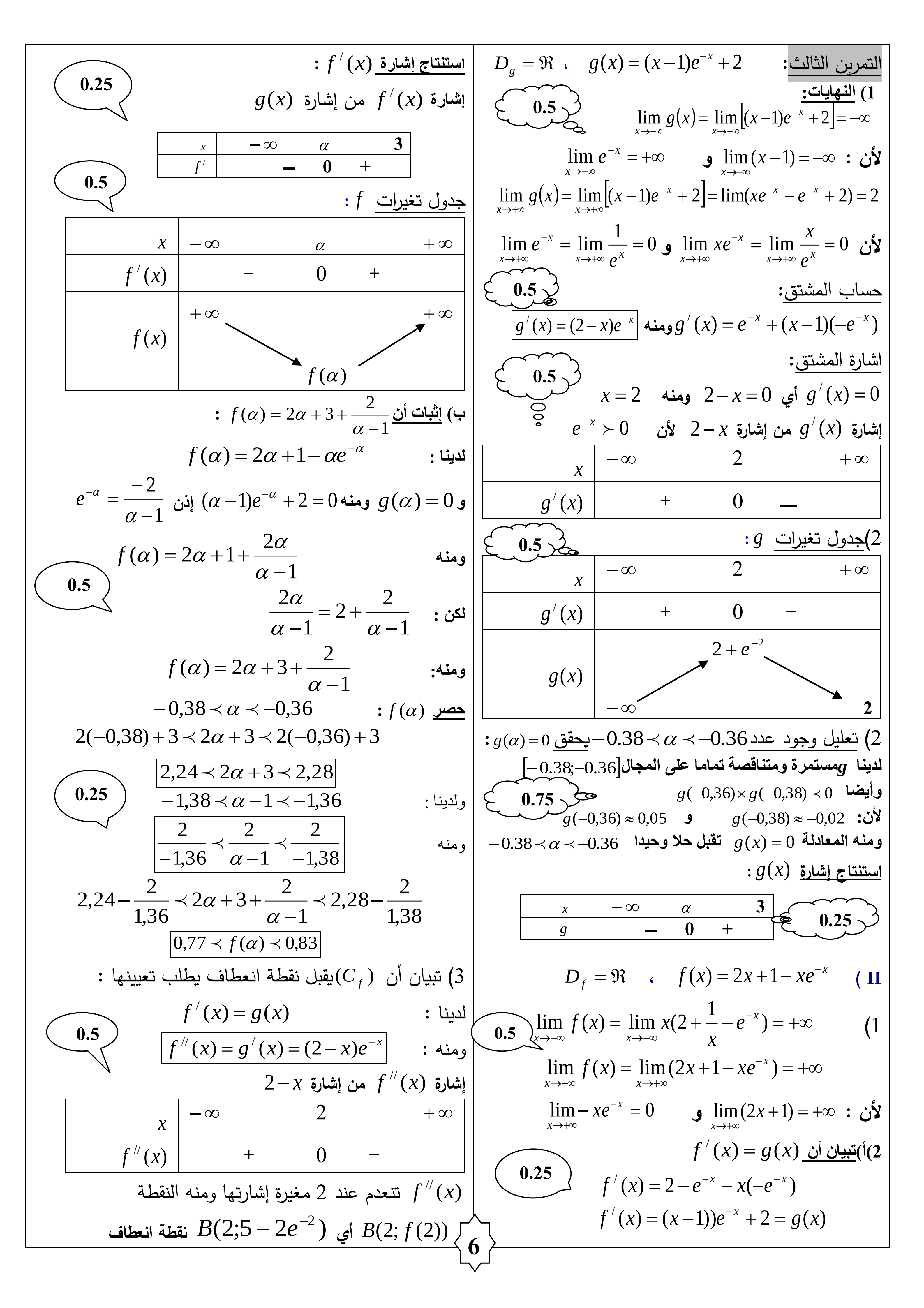
المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T الذي يضرب الأطوال في $|K|$ حيث ($k=-1$ نسبة التحاكي) ومنه :

$ED = |-1|BA = BA$

0.5 $EF = |-1|BC = BC$

$DF = |-1|AC = AC$

ومنه ABC و EDF متقايسان



التمرين الثالث: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$ ، $D_g=\Re$

1) **النهايات:** 0.5

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}[(x-1)e^{-x}+2]=-\infty$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[(x-1)e^{-x}+2]=\lim(xe^{-x}-e^{-x}+2)=2$

لأن $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

حساب المشتق: 0.5

$g'(x)=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})$ ومنه $\boxed{g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

اشارة المشتق: 0.5

$g'(x)=0$ أي $2-x=0$ ومنه $x=2$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$ لأن $e^{-x}\succ 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

2)جدول تغيرات g: 0.5

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

2) تعليل وجود عدد $-0.38\prec\alpha\prec-0.36$ يحقق: $g(\alpha)=0$

لدينا **g** مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0.38;-0.36]$

وأيضا $g(-0,36)\times g(-0,38)\prec 0$ 0.75

لأن: $g(-0,38)\approx-0,02$ و $g(-0,36)\approx 0,05$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-0.38\prec\alpha\prec-0.36$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		3
g		$-$	0	$+$	

0.25

II) $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $D_f=\Re$

(1 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x(2+\frac{1}{x}-e^{-x})=+\infty$ 0.5

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$

2)أ)**تبيان أن** $f'(x)=g(x)$ 0.25

$f'(x)=2-e^{-x}-x(-e^{-x})$

$f'(x)=(x-1))e^{-x}+2=g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$: 0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		3
f'		$-$	0	$+$	

0.5

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) **إثبات أن** $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$

و $g(\alpha)=0$ ومنه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ إذن $e^{-\alpha}=\frac{-2}{\alpha-1}$

ومنه $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}$ 0.5

لكن : $\frac{2\alpha}{\alpha-1}=2+\frac{2}{\alpha-1}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$

حصر $f(\alpha)$: $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$

$2(-0,38)+3\prec 2\alpha+3\prec 2(-0,36)+3$

$\boxed{2,24\prec 2\alpha+3\prec 2,28}$ 0.25

ولدينا : $-1,38\prec\alpha-1\prec-1,36$

ومنه $\boxed{\frac{2}{-1,36}\prec\frac{2}{\alpha-1}\prec\frac{2}{-1,38}}$

$2,24-\frac{2}{1,36}\prec 2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}\prec 2,28-\frac{2}{1,38}$

$\boxed{0,77\prec f(\alpha)\prec 0,83}$

3) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا : $f'(x)=g(x)$

ومنه : $\boxed{f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}}$ 0.5

إشارة $f''(x)$ من إشارة $2-x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$f''(x)$ تنعدم عند 2 مغيرة إشارتها ومنه النقطة

$B(2;f(2))$ أي $B(2;5-2e^{-2})$ **نقطة انعطاف**

4) أ) إثبات أن $(\Delta): y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$$

ومنه (Δ)مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ **0.25**

دراسة الوضع النسبي (C_f) و (Δ):

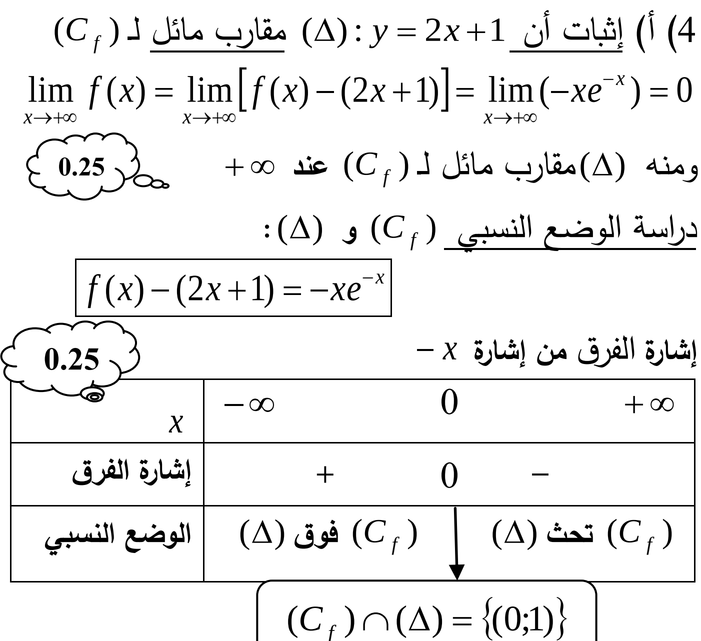
$f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$

إشارة الفرق من إشارة $-x$ **0.25**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

$(C_f)\cap(\Delta)=\{(0;1)\}$

رسم (C_f) :



0.5

5) حساب مشتق h : $h(x)=f(x^2e^x)$

$h'(x)=(x^2e^x)'\times f'(x^2e^x)$

لدينا : $(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$

ومنه : $h'(x)=(2x+x^2)e^x\times f'(x^2e^x)$

لدينا : $f'(x)=g(x)$ ومنه : $f'(x^2e^x)=g(x^2e^x)$

ومنه : $h'(x)=(2x+x^2)e^x\times g(x^2e^x)$ **0.5**

إشارة $h'(x)$:

من إشارة $2x+x^2$ لأن $e^x\succ 0$ و $g(x^2e^x)\succ 0$

(لاحظ جدول إشارة g على المجال $[0;+\infty[$)

$2x+x^2=0$ أي $x(x+2)=0$ ومنه : $x=0$ أو $x=-2$

0.25

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات h: **0.5**

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	↗	$h(-2)$	↘	1	↗	$+\infty$

6) لدينا $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

أ) تعيين العددين a و b:

بما أن k دالة أصلية للدالة $x\to -xe^{-x}$ فإن :

$$k'(x)=-xe^{-x}$$

$$k'(x)=ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x})$$

$$k'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$$

ومنه : $(-ax+a-b)e^{-x}=-xe^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=-1\\ a-b=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1\\ b=a=1\end{cases}$ **0.5**

إذن : $k(x)=(x+1)e^{-x}$

ب) إستنتاج دالة أصلية للدالة f :

$$f(x)=2x+1-xe^{-x}$$

ومنه دالة أصلية للدالة f على $\Re$ هي : **0.5**

$F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية فارس بن مهل الشهبونية

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة ماي 2015

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 4ساعات ونصف

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أنَ : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ وان $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنَه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

☜ **التمرين الثالث (05 نقاط)**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بـ** : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ج) **أحسب عبارة** v_n **بدلالة** n **ثم استنتج أن** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ **ثم أحسب** $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

☜ **التمرين الرابع : (07 نقاط)**

.I نعتبر الدالة العددية g **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **أحسب** $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا **ثم أحسب** $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) **أحسب** $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(-x+1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) **أرسم** (Δ) **و** (C_g).

6) **استنتج إشارة** $g(x)$ عندما يتغير x **في المجموعة** $\mathbb{R}$.

.II f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ **ثم أحسب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل عدد حقيقي x $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{e^x+1}$ **ثم أحسب** : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$.

4) **أحسب** $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

☜ **الموضوع الثاني**

☜ **التمرين الأول (04 نقاط)**

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;®[$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عيِّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا .

3) نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها : z_1, z_0 و z_2 على الترتيب .

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيَن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ، $\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$

☜ **التمرين الثاني :(04 نقاط)**

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

1- أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2- a و b عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\sim 0 \sim 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\sim \ 0 \sim}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين ~ و حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) .

☜ **التمرين الثالث (04 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC)

☜ **التمرين الرابع :(08 نقاط)**

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبيَن أنَ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0),f(3)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E): f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1- أ) بيَن أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

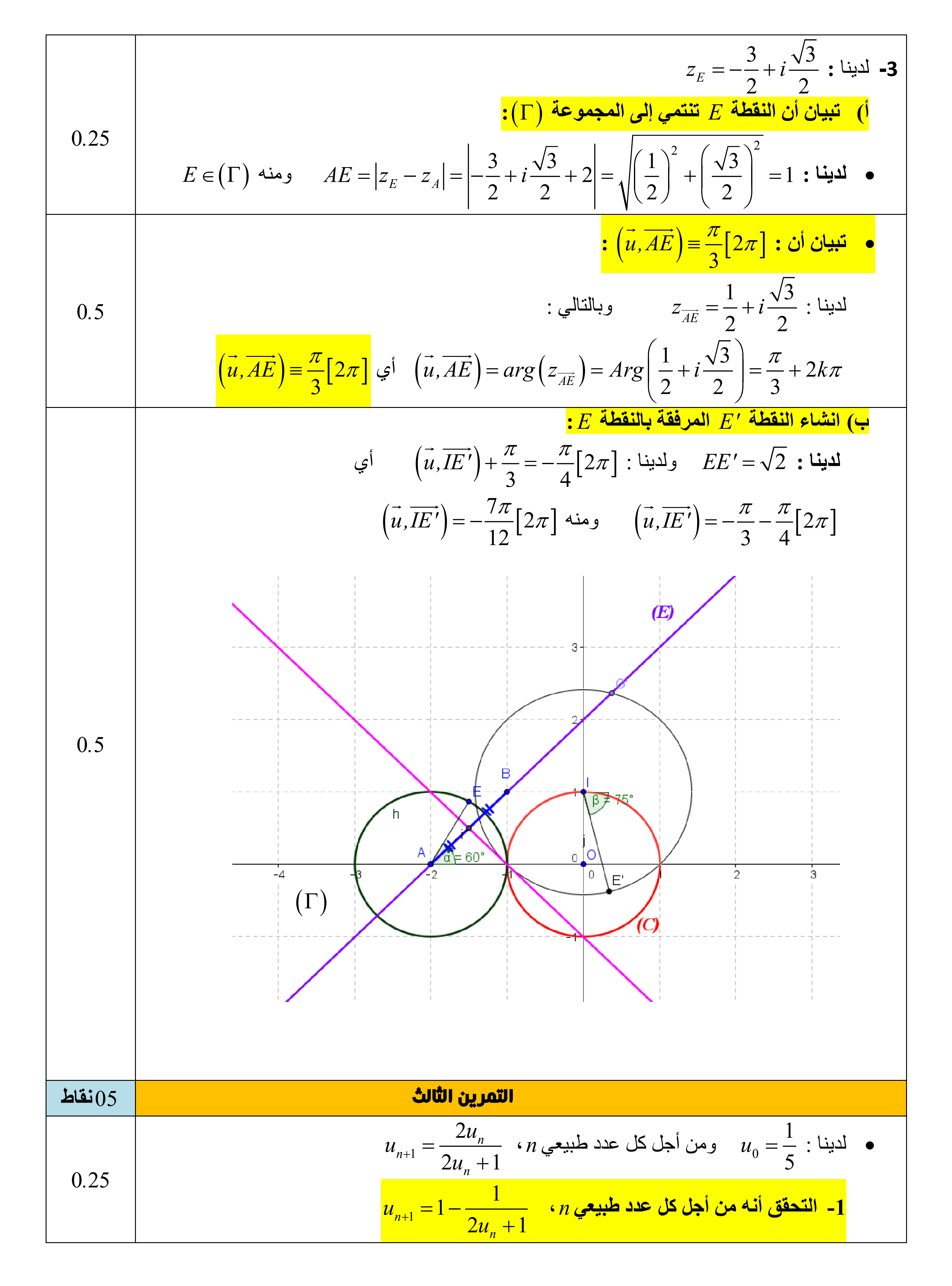
ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

❀ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015 ❀

العلامة	الإجابة
	الموضوع الأول
04	التمرين الأول
01	لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$ 1) تبيان أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$ • لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$ • ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$ • إذن : $626a+125b+30c=577b+8a$ اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$
0.25	2) تبيان أن العدد 3قاسم للعدد b: • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ - لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .
0.75	3) نفرض $b=3$. أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$ • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$ • ولدينا : $309a-618=60-15c$ ومنه $309(a-2)=60-15c$
2×0.75	ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$: • لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$ $5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$حسب مبرهنة غوص . • استنتاج قيمة a : بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$ ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$. • استنتاج قيمة العدد c: لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$
0.5	ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10: $N=577(3)+8(2)=1747$
04نقاط	✍ التمرين الثاني
0.25	• لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$ **1- أ) التحقق من أنَ :** $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ • لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

0.5	ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$: • لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$ • ولدينا : $\left\|z'\right\| = \left\|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right\| = \frac{\|i\|\times\|z+1-i\|}{\|z+2\|}$ أي $OM' = \frac{BM}{AM} = 1$ • إذن $OM' = 1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R = 1$
0.5	ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا : • z' تخيلي صرف معناه $Arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ • ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي $Arg(i) + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ معناه : $\frac{\pi}{2} + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi$ أي $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = k\pi$ • المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B. $(E) = (AB) - \{A,B\}$
0.25	**2-** أ) التحقق من أنّ : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$ • لدينا : $z' - i = \frac{iz+i+1}{z+2} - i = \frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \frac{1-i}{z+2}$ أي $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$
0.25	ب) استنتاج أنّ : $IM' \times AM = \sqrt{2}$: • لدينا : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$ ومنه $\|z'-i\| = \left\|\frac{1-i}{z+2}\right\|$ أي $\|z'-i\| = \frac{\|1-i\|}{\|z+2\|}$ وبالتالي : $IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM' \times AM = \sqrt{2}$
0.5	• استنتاج أنّ : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ لدينا : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i) = Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$ أي $Arg(z'-i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i) + Arg(z+2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ اي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IM'}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
0.5	ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها : • لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM = 1$ • ولدينا : $IM' \times AM = \sqrt{2}$ أي $IM' = \sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R = \sqrt{2}$

0.25	**-3** لدينا : $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ):** • **لدينا :** $AE = \lvert z_E - z_A \rvert = \left\lvert -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \right\rvert = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ومنه $E \in (\Gamma)$
0.5	• **تبيان أن :** $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:** لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) = arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right) = Arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أي $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
0.5	**ب) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :** **لدينا :** $EE' = \sqrt{2}$ ولدينا : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}\right) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IE'}\right) = -\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ 
05 نقاط	**التمرين الثالث**
0.25	• لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$ **-1 التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n،** $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

- لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$	
2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$ نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ وبالتالي $1<\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ إذن $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2u_n+1}<-1$ وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.	0.75
ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ • لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$.	0.25
• **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$ - ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.	0.5
ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$	0.5

0.75	3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ **أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :** • لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$ أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$ $v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n+1}\times\frac{2u_n+1}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$
0.5	**ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :** • لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times6^n$
0.75	• **استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$** - لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$ - ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$ إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}$ ومنه $u_n==-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}=\frac{2^n\times3^n}{2\times3^n\times2^n+3\times3^n}$ أي $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$
0.5	• حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$
07 نقاط	**التمرين الرابع**
	I. لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-ln(e^x+1)$ **1) حساب النهايات :** • **حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$:**

0.25 0.25	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=0$ لانّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+1\right)=0\end{cases}$ - **التفسير الهندسي** : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$
0.25	• **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-ln\left(e^x+1\right)\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$
0.5	**2) تبيان أنّ $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$** • لدينا : $g'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ أي $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$
0.25	• **استنتاج اتجاه تغير الدالة g:** <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$-e^{2x}$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td></tr></table>
0.5	• **جدول التغيرات :** <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>0 ↘ $-\infty$</td></tr></table>
0.5	**3) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$** • لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(e^x\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)$ أي $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+ln\left(1+e^{-x}\right)-x$

4) أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$:

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$ 0.5

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

- **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$. 0.25

5) **الرسم :** 0.75

y=-x+1

(Cg)

6) **استنتاج اشارة $g(x)$:** 0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

.II لدينا : $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$

1) **البرهان أنَ : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$** 0.25

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$

إذن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$

- **حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$ 0.25

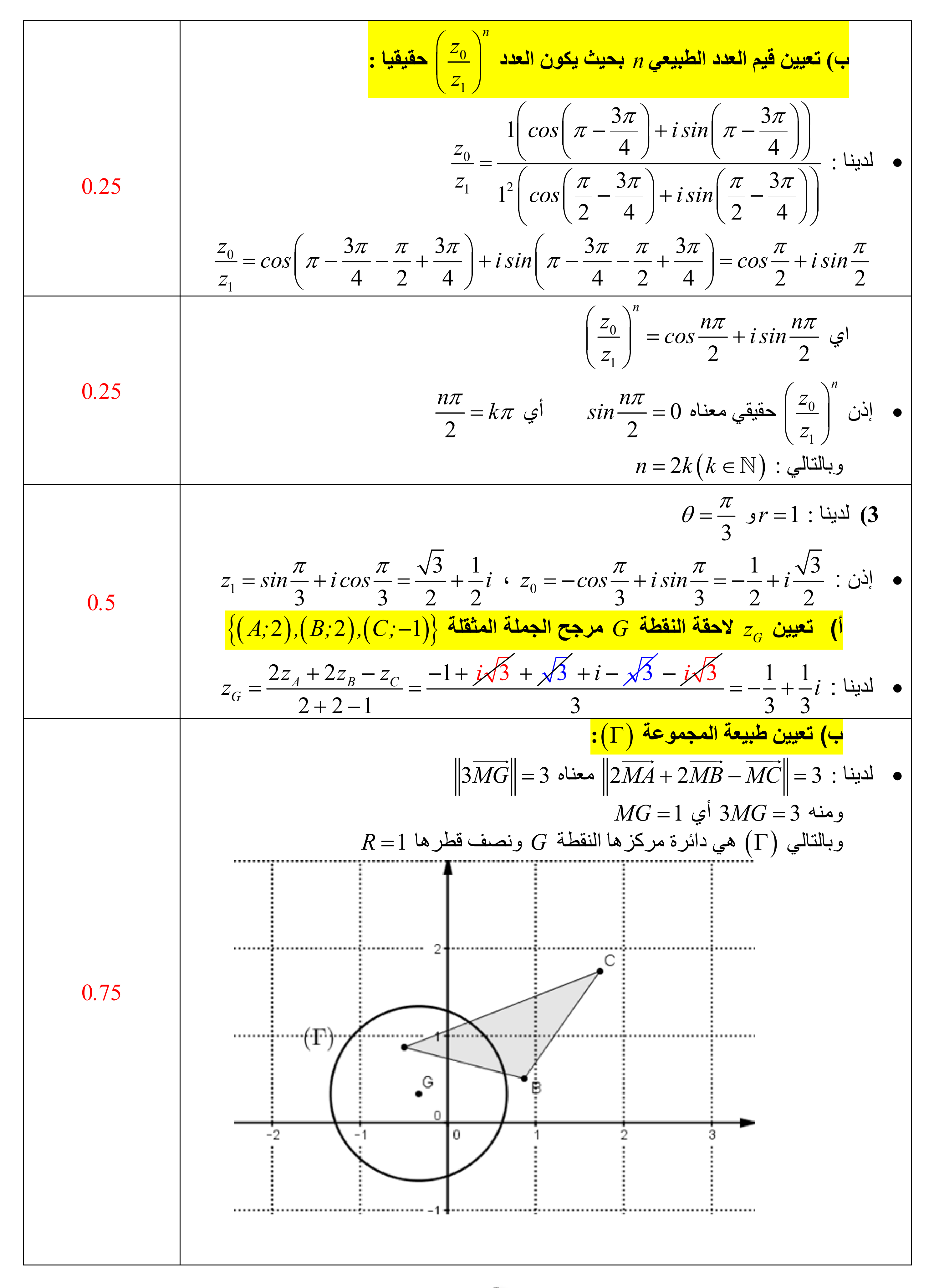
2) **تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$:** 0.5

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times\ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

0.25	• **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ x: $-\infty$ … $+\infty$ $g(x)$: $-$ $f'(x)$: $-$
0.5	• **جدول تغيرات الدالة f :** x: $-\infty$ … $+\infty$ $f'(x)$: $-$ $f(x)$: 1 ↘ 0
0.25	**3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$** • من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$
0.5	• حساب $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$: $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$ أي $\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$
0.5	**4) حساب $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$: بالمكاملة بالتجزئة** $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$ نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$ و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ إذن : $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$ أي $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$ $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$ إذن $\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$

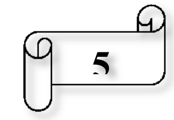
الإجابة	العلامة
التمرين الأول :	**04 نقاط**
• لدينا : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$ حيث $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و $\theta \in [0;\pi]$ **1) كتابة الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :** • لدينا : $z_0 = r(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta))$ $z_1 = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ $z_2 = \sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	3×0.5
2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$ • لدينا : $\overline{z_0} = r(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta))$ - $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = r(\cos(-\pi+\theta) + i\sin(-\pi+\theta))$ ومنه : $\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ أي $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi \ (k\in\{0;1\}) \end{cases}$ من أجل $k=0$ نجد : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (مقبولٌ لأنّ $\theta\in[0;\pi]$) من أجل $k=1$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi$ (مرفوض) $z_1 = \overline{z_0}$ معناه $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	0.75

0.25	**ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا :** • لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$ $\frac{z_0}{z_1}=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$
0.25	أي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}$ • إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $\sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$ وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$
0.5	**3)** لدينا : $r=1$ و$\theta=\frac{\pi}{3}$ • إذن : $z_0=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ **أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$** • لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$
0.75	**ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):** • لدينا : $\lVert 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\rVert=3$ معناه $\lVert 3\overrightarrow{MG}\rVert=3$ ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$ وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$ 

التمرين الثاني	04 نقاط
لدينا : $(E): 5x-6y=3$ **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $5\wedge 3=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	0.25
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\frac{5\times 3-3}{6}=\frac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)	0.5
• **حل المعادلة (E):** لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$ أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge 5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k\,(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2\,(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$	0.5
ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$ • $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$	0.75
2- لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$ • **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E):** - لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\le 2$ و $\beta\le 4$ • **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$** ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة	0.75 0.75

04 نقاط	التمرين الثالث
0.5	لدينا : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$ **1) البرهان على أنَ المثلث ABC قائم :** - لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$ ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$ إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A.
0.5	**2) البرهان على أنَ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :** • لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) - إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$ - نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$ وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A**
0.5	**3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :** لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x-3z+d=0$ - تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي معادلة للمستوي (P'): $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$
0.5	**4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P'):** • لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$ - نضع : $z=t$ وبالتالي : $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}$
0.5	**5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)** • **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن : - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$ - **وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)**

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: $v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$ - لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ - أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $\quad v_{ABCD}=27uv$	0.5
ج) تبيان أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$: - لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$ - ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\Vert\overrightarrow{DB}\Vert\times\Vert\overrightarrow{DC}\Vert\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ $cos(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$	0.5
د) حساب مساحة المثلث BDC : - $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$ - استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) : لدينا : $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}\times 27\times d(A,(BCD))=27$ ومنه $d(A,(BDC))=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\quad d(A,(BDC))=3$	0.5
التمرين الرابع	**08 نقاط**
I. لدينا : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ (1 أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$	0.25
• تبيان أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$: لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$	0.25



أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$

0.5

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

- **لدينا :** $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)\left(-e^{-x+1}\right)\right]=1-\left(2x-x^2-1\right)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+\left(x^2-2x+1\right)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

0.25

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

0.5

- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

0.25

2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\left(x^2+1\right)e^{-x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

0.5

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-\left(x^2+1\right)e^{-x+1}-x=-\left(x^2+1\right)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

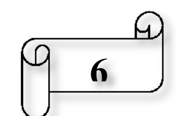
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.



4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = 1\times(x-1)-1 = x-2$ أي $(T): y = x-2$

0.5

5) تبيان أنّ $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times \left(-e^{-x+1}\right) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

- **استنتاج أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1;f(1)), B(3;f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحنى (C_f)

01

6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3-9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$

الرسم :

01

0.5	**7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$** • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و(Δ) . • إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .
0.5	II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$ **1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:** • لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
0.25	ب) **حساب I_1** : • لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$
0.5	**2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$** • لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$ نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$ ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$
0.25	**ب) حساب** I_2: $I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$
0.5	**3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1, x=0$:** $S=\int_0^1\left[y-f(x)\right]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$ أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$ $S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مـــديرية التربية بولاية تمنراست — ثانويات تمنراست المقاطعة 29

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — المــوسم الدراسي : 2017/2016

الشعبـــــة : الثالثة علوم التجريبية .

اختبار في مادة الرياضيات — المـــــــــدة : 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$ ؛ نعتبر النقط :

$A(1\,;1;0)$, $B(2;0;-1)$; $C(0;3;-1)$ و $D(-1\,;4;\,0)$

1) أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم بين أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$.

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) .

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2\,;0\,;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)

4) أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) ثم أدرس تقاطع سطح الكرة S و المستقيم (CD).

التمرين الثاني (5 نقاط) :

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$.

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{\ })$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z}_A$.

أثبت أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ ثم عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛ ثم بين أن النقط A ؛ C و E في استقامية .

5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ؛ $(z\neq z_C)$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$.ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + ... + \frac{5^n}{v_n}$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ؛ $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن g(1)=0)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- بين أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$ ؛ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $\left(\overline{z}+2\right)^2-6\left(\overline{z}+2\right)+10=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ،B ،C ،D لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و و $z_D=1-i$

عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$

عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

4) مثل النقاط A ،B ،E ،F و H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$.

عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

ليكن (p_1) و (p_2) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :

$$x-2y+4z-9=0 \quad ; \quad -2x+y+z-6=0$$

1) بين أن (p_1) و (p_2) متعامدان. نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) .

بين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$.

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(-9;-4;-1)$. تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2) ثم بين أن :

$$AM^2=14t^2-14t+21$$

3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t)=14t^2-14t+21$

أدرس تغيرات الدالة f ثم أستنتج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه الحالة بـ H

4) ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) ثم برهن أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \le \frac{4 - u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 4 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$

أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$

7- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للاختبار التجريبي للشعبة العلوم التجريبية ماي 2017

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$ ؛ نعتبر النقط :

$A(1\,;1;0)$, $B(2;0;-1)$; $C(0;3;-1)$ و $D(-1\,;4;\,0)$

1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2\,;3\,;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2;\,3;0)$ و منه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$3(1)+2(1)+(0)-5=0$ محققة و منه A تنتمي إلى هذا المستوي .

$3(2)+2(0)+(-1)-5=0$ محققة و منه B تنتمي إلى هذا المستوي .

$3(0)+2(3)+(-1)-5=0$ محققة و منه C تنتمي إلى هذا المستوي .

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$.

2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) :

ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\overrightarrow{n'}(a;b;c)$ و الشعاع الناظيمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(3;2;1)$ و $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;-1)$

لدينا (Q) يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي يعني أن $\overrightarrow{n'}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{AB}=0$ أي ان

$\begin{cases} a-b-c=0\,\ldots.(1)\\ 3a+2b+c=0\,\ldots\ldots(2)\end{cases}$ بالجمع نجد $b=-4a$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد $a+4a-c=0$ و منه $c=5a$ بوضع $a=1$ نجد ان $\overrightarrow{n'}(1;-4;5)$ و منه معادلة (Q) هي من الشكل $x-4y+5z+d=0$ و هو يشمل النقطة A نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد $1-4(1)+5(0)+d=0$ و منه $d=3$ معادلة (Q) هي $x-4y+5z+3=0$

3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2\,;0\,;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)

هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $\begin{cases} x=t-2\\ y=-4t \quad : t\in IR\\ z=5t-3\end{cases}$

4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي $(\,ABC\,)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $HM=d(H;\,ABC)$ نحسب $d(H;\,ABC)=\dfrac{|3(-2)+2(0)+(-3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\sqrt{14}$

و منه $(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=14$ بالتبسيط نجد $x^2+y^2+z^2+4x+6z-1=0$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم $(\,CD\,)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) لدينا $\overrightarrow{CD}(-1;1;1)$ هو $\begin{cases} x=-t` \\ y=t`+3 : t`\in IR \\ z=t`-1 \end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة

الديكارتية للسطح S نجد $t`^2+(t`+3)^2+(t`-1)^2-4t`+6(t`-1)-1=0$ و منه $3t`^2+6t`+3=0$ و هذا يكافئ $t`^2+2t`+1=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t`=-1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1;2;-2)$.

التمرين الثاني (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$ يكافئ $z-\sqrt{3}=0$ او $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ أي ان $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز للمعادلة الثانية $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ مجموعة الحلول هي $S=\left\{\sqrt{3}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

2) المستوى المركب منسوب إلى معلم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_A}$.

اثبات أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$z_A^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}$ و منه $z_A^{1962}=e^{-327\pi i}=\cos(-327\pi)+i\sin(-327\pi)=-1$

و $z_C^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}$ و منه $z_C^{2016}=e^{336\pi i}=\cos(336\pi)+i\sin(336\pi)=+1$ و منه $-1+1=0$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^n=e^{-\frac{n\pi}{3}i}=\cos\left(\frac{-\pi n}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ أي ان $\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه نجد $n=6k$ و k عدد طبيعي

3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{6}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ : k \in Z$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A$ و منه

$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) + \left(1 - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ ومنه

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i$ و

$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i$ و منه $z_E - z_A = 2(z_C - z_A)$ أي ان

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.

5) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا $(\ z \neq z_C\ )$

يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k \ : k \in Z$ و هذا يعني أن $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه و

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$ بالقسمة الاقليدية نجد

$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$ و منه $a = 3$ ، $b = -10$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$

لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة



نفرض أن $-2<u_n<1$ و لنبرهن أن $-2<u_{n+1}<1$

الطريقة الأولى :

نبرهن أن $-2<u_{n+1}$ أي $2+u_{n+1}>0$

$2+u_{n+1}=2+3-\frac{10}{u_n+4}=\frac{5u_n+12-10}{u_n+4}=\frac{5u_n+2}{u_n+4}$ موجبة لان $2+u_n>0$ و منه $2+u_{n+1}>0$.

نبرهن أن $u_{n+1}<1$ أي $u_{n+1}-1<0$

$u_{n+1}-1=3-\frac{10}{u_n+4}-1=\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}=2\left(\frac{u_n-1}{u_n+4}\right)$ عدد سالب لان لان $-2<u_n<1$ و منه $u_{n+1}<1$

و منه $-2<u_{n+1}<1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي f حيث $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=\frac{10}{(x+4)^2}$

و منه f متزايدة على المجال $[-2;1]$.

$-2<u_n<1$ و منه نجد $f(-2)<f(u_n)<f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2<u_{n+1}<1$

و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=-\frac{(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ الفرق موجب لأن $-2<u_n<1$

و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2}{1-\frac{3u_n+2}{u_n+4}}=\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4-3u_n-2}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5}{2}\left(\frac{u_n+2}{1-u_n}\right)=\frac{5}{2}v_n$$ و منه المتتالية

(v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=\frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{9}{3}=3$

كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$

لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ أي ان $v_n-u_nv_n=u_n+2$ و منه $u_n+u_nv_n=v_n-2$ أي ان $u_n(1+v_n)=v_n-2$ و

منه $u_n=\frac{v_n-2}{1+v_n}=\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$.

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = 1$

4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + ... + \frac{5^n}{v_n}$ بوضع. $t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{2^n}{3}$ و منه (t_n) متتالية هندسية

أساسها 2 و حدها الأول $t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3}$ و منه $S_n = t_0 + t_1 + t_2 + ... t_n = t_0\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right) = \frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$:

$g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$ و $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2+1-2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x\to+\infty}(t) = +\infty$ و منه

$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{2\ln(t)}{t}\right]^2 = 0$ لان $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\right] = 0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x}\right] = +\infty$ لان

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x}\right] = 0$.

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x})=f(x)$: لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-2=x+\frac{1}{x}-(-\ln x)^2-2=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$

حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x=0$.

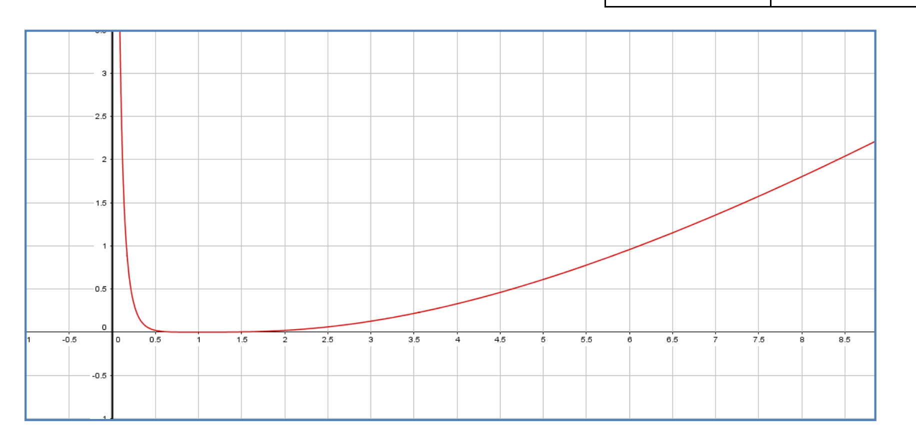
-2 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ و منه

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}(\ln x)=\frac{x^2-1-2x\ln x}{x^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

-3 رسم المنحنى (C) :



-4 بين أن الدالة $h: x\mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln(x)$ على $]0,+\infty[$

محققة $h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

باستعمال التكامل بالتجزئة

تبيين أن $\int_1^e (\ln x)^2dx=e-2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$

و منه $u'(x)=1$ و $\int_1^e u'(x).v(x)dx=\left[x(\ln(x))^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln(x)dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=e-2$

-5 حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left[x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right]dx$ و. منه $\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-2x\right]_1^e-e+2$

$$\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}+1-2e+\frac{3}{2}-e+2=\left(\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}\right)u.a$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$ نحسب المميز $\Delta=-4$ للمعادلة حلين هما $z'=3-i$ و $z''=3+i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $\left(\overline{z}+2\right)^2-6\left(\overline{z}+2\right)+10=0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\overline{z}+2=3-i$ او $\overline{z}+2=3+i$ أي ان $\overline{z}=1-i$ او $\overline{z}=1+i$ و منه $z=1+i$ او $z=1-i$ هما حلى المعادلة الأخيرة

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ،B ،C ،D لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و $z_D=1-i$ و

تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z'-z_A=i\left(z-z_A\right)$ أي $z'-3+i=i\left(z-3+i\right)$ و منه $z'=iz+2-4i$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$ لدينا $z_F=iz_E+2-4i=i\left(7-3i\right)+2-4i=7i+3+2-4i=5+3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H-z_F=z_E-z_A$ و منه $z_H=z_F+z_E-z_A=5+3i+7-3i-3+i=9+i$.

4)تمثيل النقاط A ،B ،E ،F و H

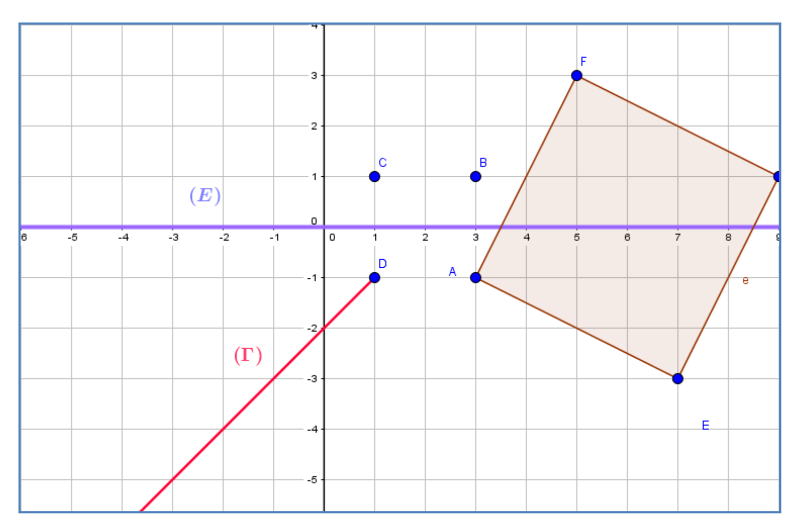
تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاوران متقايسان فهو مربع .

5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن $z-(1-i)=ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ أي ان

$\arg[z-(1-i)]=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و هذا يعني

$\left(\overrightarrow{0I};\overrightarrow{DM}\right)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ و k عدد صحيح

مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجهيه -1) أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$)



تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$ تكافئ $CM=DM$
مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

ليكن (p_2) و (p_1) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب :

$$x-2y+4z-9=0 \quad ; \quad -2x+y+z-6=0$$

1) تبين أن (p_2) و (p_1) متعامدان : شعاعيهما الناظيميان $\overrightarrow{n'}(-2\,;1;1)$ و $\vec{n}(1;-2;4)$ على الترتيب

نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2)+(-2)1+4(1)=0$ و منه متعامدان .

نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_2) و (p_1) .

تبيين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو :
$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$$

(D) محتواة في (p_1) يعني $(-7+2t)-2(-8+3t)+4(t)-9=0$ يعني ان $0=0$ محققة .

(D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7+2t)+(-8+3t)+(t)-6=0$ يعني ان $0=0$ محققة و منه (D) هو تقاطعهما .

2) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات $(-9\,;-4;-1)$.

التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوى (p_1) و لا إلى المستوى (p_2)

$(-9)-2(-4)+4(-1)-9=0$ أي ان $-18+4=0$ غير محققة و منه A لا تنتمي الى (p_1)

$-2(-9)+(-4)+(-1)-6=0$ أي ان $18-11=0$ غير محققة و منه A لا تنتمي الى (p_2)

ثم بين أن : $AM^2=14t^2-14t+21$ لدينا $M(-7+2t\,;-8+3t\,;t)$ و منه

$\overrightarrow{AM}(2+2t\,;-4+3t\,;t+1)$ و منه $AM^2=(2+2t)^2+(-4+3t)^2+(t+1)^2$ بالنشر و

التبسيط نجد $AM^2=14t^2-14t+21$ و هو المطلوب .

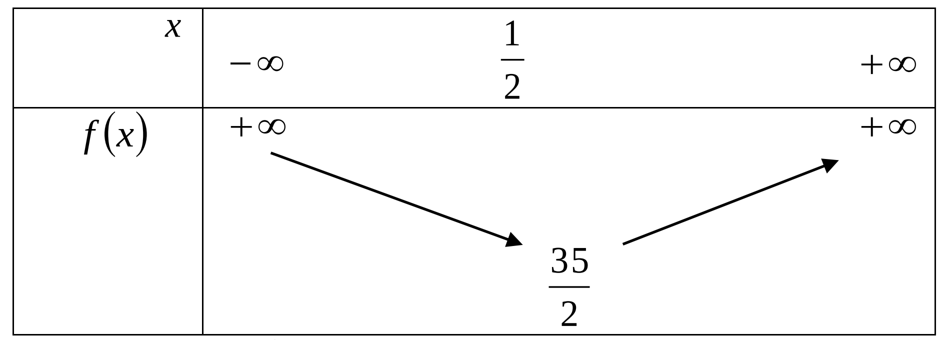
3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t)=14t^2-14t+21$

دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

المشتقة : $f'(x)=28t-14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0\,;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;0]$.

جدول تغيراتها



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{35}{2}$	$+\infty$

أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه الحالة بـ H : من جدول تغيرات f نستنتج أن قيمة $t=\frac{1}{2}$ و $AH=\sqrt{\frac{35}{2}}$ و منه $H\left(-6\,;-\frac{13}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

4) ليكن (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A الشعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو شعاع توجيه للمستقيم (D) و منه شعاعه الناظيمي هو $\overrightarrow{n''}(2;3;1)$ معادلته الديكارتية من الشكل $2x+3y+z+d=0$ بما انه مار بالنقطة A يعني أن $2(-9)+3(-4)+(-1)+d=0$ و منه $d=31$ و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x+3y+z+31=0$.

البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D): يجب أن تكون H نقطة من (D) و الشعاع $\overrightarrow{AH}$ هو شعاع عمودي على شعاع توجيه هذا المستقيم

$\overrightarrow{AH}\left(3\,;-\frac{5}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ و شعاع توجيه المستقيم (D) هو $\overrightarrow{n''}(2;3;1)$ نحسب الجداء السلمي

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n''}=6-\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-12+12}{2}=0$ و منه محققة

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1=5-\frac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

لدينا $2\le u_1\le 4$ محققة

نفرض أن $2\le u_n\le 4$ و لنبرهن أن $2\le u_{n+1}\le 4$

$4 \geq u_n \geq 2$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{2}$ بالضرب في -4 نجد $-1 \geq -\frac{4}{u_n} \geq -2$ بإضافة 5 نجد

$4 \geq 5-\frac{4}{u_n} \geq 3$ أي ان $4 \geq u_{n+1} \geq 3 \geq 2$ و منه $4 \geq u_{n+1} \geq 2$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $4 \geq u_n \geq 2$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$u_{n+1}-u_n=5-\frac{4}{u_n}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^2}{u_n}=\frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب لان $4 \geq u_n \geq 2$ فإن $4-u_n \geq 0$ و $-1+u_n \geq 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

3) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1} \leq \frac{4-u_n}{2}$

لدينا $4-u_{n+1}=4-5+\frac{4}{u_n}=-1+\frac{4}{u_n}=\frac{-u_n+4}{u_n}=\frac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $4 \geq u_n \geq 2$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, و منه $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$.

4) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$

و منه $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا

$0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4-u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان

$0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0 \leq 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4-u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0 \leq 4-u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا $f'(x)=(2ax+b)\ e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$; و منه $b=0$

$f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$

2- نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right]=4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)e^{-x}=+\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

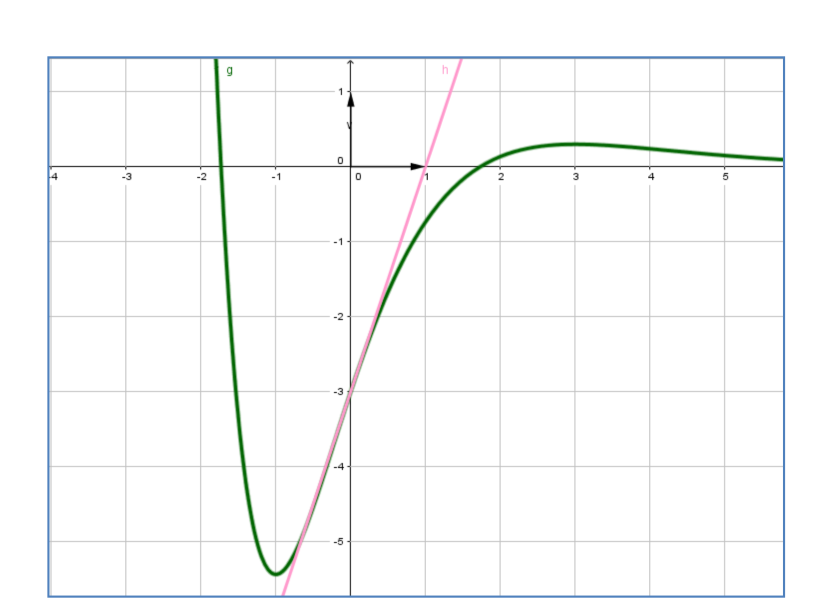
و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$



4- رسم (T) و (C_f)

5- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

و $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

$$f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$ أي ان $f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه $f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$ أي $F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$ و منه $F(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

$$A=\int_1^{\sqrt{3}}-f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}f(x)dx=[-F(x)]_1^{\sqrt{3}}+[F(x)]_{\sqrt{3}}^{3}=(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$$

$$A=\left[(4+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$

المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $-3 < -m \leq 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي شعبة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

<table>
<tr><th rowspan="2">التمارين</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">التنقيط</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>كاملة</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول</td><td>
1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و لدينا
$\overrightarrow{AD}(-2\,;3\,;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2;3;0)$ و منه محققة
اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x+2y+z-5=0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي A و B و C
2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC)
ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\overrightarrow{n'}(1;-4;5)$ و منه
معادلة (Q) هي $x-4y+5z+3=0$
3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2\,;0\,;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)
$\begin{cases} x=t-2 \\ y=-4t \quad ;t\in IR \\ z=5t-3 \end{cases}$
4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) نحسب
$d(H\,;\,ABC)=\dfrac{|3(-2)+2(0)+(-3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\sqrt{14}$
$x^2+y^2+z^2+4x+6z-1=0$
دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)
التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) $\begin{cases} x=-t` \\ y=t`+3;\ t`\in IR \\ z=t`-1 \end{cases}$ و منه نعوض في المعادلة الديكارتية
للسطح S نجد $t`^2+(t`+3)^2+(t`-1)^2-4t`+6(t`-1)-1=0$ و منه
$3t`^2+6t`+3=0$ و هذا يكافئ $t`^2+2t`+1=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t`=-1$ إذن
سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1;2;-2)$.
</td><td>0.25
0.75
0.5
0.5
0.5
0.25
0.25
0.25
0.25
0.5</td><td>04 ن</td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني</td><td>
1) حلول المعادلة $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و
$z''=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
2) اثبات أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و
$z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_A^{1962}=e^{-327\pi i}=-1$
و $z_C^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}$ و منه $z_C^{2016}=e^{336\pi i}=1$ و منه $-1+1=0$
تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب
</td><td>1
.
0.5
0.5</td><td>5ن</td></tr>
</table>

	$n=6k$ و k عدد طبيعي 3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ المثلث ABC متقايس الأضلاع . 4) تعيين z_E لاحقة النقطة E : $z_E=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية. 5) تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ($z\neq z_C$) يعني أن $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z$ و هذا يعني أن $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و منه $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.	0.5 0.5 0.5 0.5 1	
التمرين الثالث	1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b : $a=3$ ، $b=-10$ البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<1$ لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ و منه $-2<u_0<1$ محققة نفرض أن $-2<u_n<1$ و لنبرهن أن $-2<u_{n+1}<1$ نبرهن أن $-2<u_{n+1}$ أي $2+u_{n+1}>0$ $2+u_{n+1}=2+3-\frac{10}{u_n+4}=\frac{5u_n+12-10}{u_n+4}=\frac{5u_n+2}{u_n+4}$ موجبة لان $2+u_n>0$ و منه $2+u_{n+1}>0$. نبرهن أن $u_{n+1}<1$ أي $u_{n+1}-1<0$ $u_{n+1}-1=3-\frac{10}{u_n+4}-1=\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}=\frac{2u_n-2}{u_n+4}=2\left(\frac{u_n-1}{u_n+4}\right)$ عدد سالب لان لان $-2<u_n<1$ و منه $u_{n+1}<1$ و منه $-2<u_{n+1}<1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-2<u_n<1$ 2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ الفرق موجب لأن $-2<u_n<1$ و منه المتتالية متزايدة . استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة . 3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$. تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1}=\frac{5}{2}v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=3$ كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$	0.25 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	4 ن

و منه $u_n = \dfrac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$. — 0.25

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ — 0.25

4) حساب المجموع : $S_n = \dfrac{1}{v_0} + \dfrac{5}{v_1} + \dfrac{5^2}{v_2} + ... + \dfrac{5^n}{v_n}$. منه $S_n = \dfrac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$ — 1

التمرين الرابع — 7 ن

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$: — 0.5

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$. — 0.5

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0,+\infty[$ تتلخص الاشارة في الجدول الموالي — .

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	

— 0.5

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ اثبات أن

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(t) = +\infty$ و منه — 0.5

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{2\ln(t)}{t}\right]^2 = 0$ لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(t)}{t}\right] = 0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. — 0.25

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$: ل — 0.25

حساب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و منه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$. — 0.25

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ ؛ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ — 0.25 — 0.5

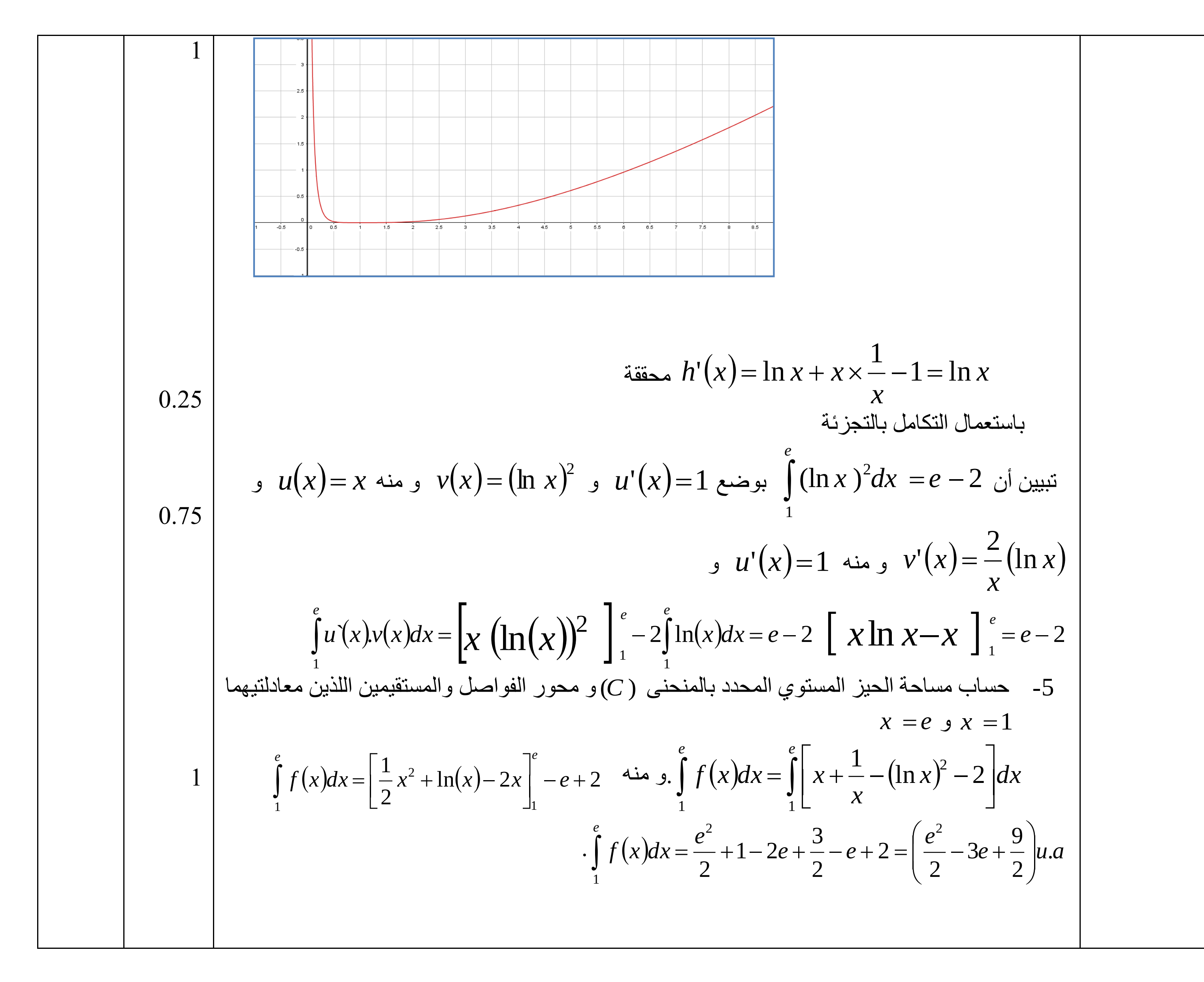
جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

— 0.5

3- رسم المنحنى (C) :

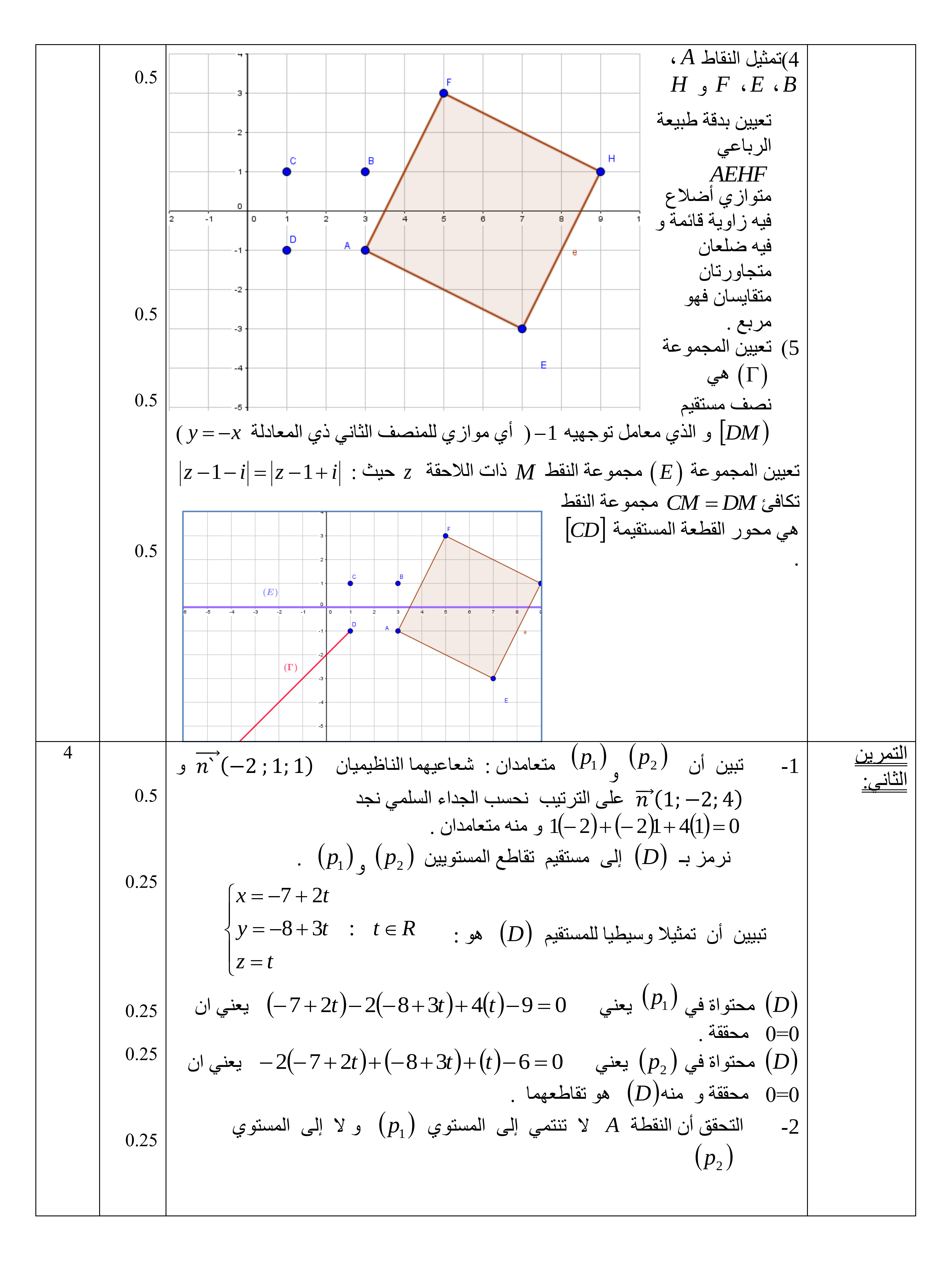
4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0,+\infty[$



كاملة	مجزأة	عناصر الإجابة	التمارين
	1	(المنحنى)	
	0.25	$h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$ محققة باستعمال التكامل بالتجزئة	
	0.75	تبيين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$ و منه $u'(x)=1$ و $\int_1^e u'(x).v(x)dx=\left[x(\ln(x))^2\right]_1^e-2\int_1^e\ln(x)dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=e-2$	
	1	5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left[x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right]dx$.و منه $\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln(x)-2x\right]_1^e-e+2$ $\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}+1-2e+\frac{3}{2}-e+2=\left(\frac{e^2}{2}-3e+\frac{9}{2}\right)u.a$.	

الموضوع الثاني

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
04 ن		**التمرين الاول (5 نقاط) :**	التمرين الأول
	0.5	1) حلو المعادلل في نحسب المميز $\Delta=-4$ للمعادلة حلين هما $z'=3-i$ و $z''=3+i$	
	0.5	استنتاج حلول المعادلة $(\overline{z}+2)^2-6(\overline{z}+2)+10=0$ مما سبق نجد أن منه $z=1+i$ او $z=1-i$ هما حلى المعادلة الأخيرة	
	1	2) تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z'-z_A=i(z-z_A)$ أي $z'-3+i=i(z-3+i)$ و منه $z'=iz+2-4i$	
	0.5	3) التحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$ لدينا $z_F=5+3i$ محققة	
	0.5	تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H=9+i$.	



التمرين	الإجابة	العلامة	المجموع
	4) تمثيل النقاط A، B، E، F و H تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاوران متقايسان فهو مربع . 5) تعيين المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y=-x$) تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\lvert z-1-i\rvert=\lvert z-1+i\rvert$ تكافئ $CM=DM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$.	0.5 0.5 0.5 0.5	
التمرين الثاني:	1- تبين أن (p_2) و (p_1) متعامدان : شعاعيهما الناظميان $\vec{n'}(-2\,;1;1)$ و $\vec{n}(1;-2;4)$ على الترتيب نحسب الجداء السلمي نجد $1(-2)+(-2)1+4(1)=0$ و منه متعامدان . نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (p_2) و (p_1) . تبيين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad : \quad t\in R \\ z=t \end{cases}$ (D) محتواة في (p_1) يعني $(-7+2t)-2(-8+3t)+4(t)-9=0$ يعني ان 0=0 محققة . (D) محتواة في (p_2) يعني $-2(-7+2t)+(-8+3t)+(t)-6=0$ يعني ان 0=0 محققة و منه (D) هو تقاطعهما . 2- التحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (p_1) و لا إلى المستوي (p_2)	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25	4

	0.5	تبين أن : $AM^2 = 14t^2 - 14t + 21$.		
		3) لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f(t) = 14t^2 - 14t + 21$		
		دراسة تغيرات الدالة f :		
		النهايات $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$		
	0.5	المشتقة : $f'(x) = 28t - 14$ تنعدم عند $\frac{1}{2}$ و منه f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$.		
		جدول تغيراتها		
		(جدول التغيرات أدناه)		
	0.5	أستنتاج إحداثيات M التي تكون فيها المسافة AM أصغرية و نرمز لها في هذه		
		$H\left(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2}\right)$		
	0.5	4) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $2x + 3y + z + 31 = 0$.		
		البرهان أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) :		
	0.5	الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n''} = 6 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = \frac{-12+12}{2} = 0$ و منه محققة		
4	+0.25 0.25	1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$	التمرين الثالث	
		البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le 4$		
	0.5	لدينا $2 \le u_1 \le 4$ محققة		
		نفرض أن $2 \le u_n \le 4$ و لنبرهن أن $2 \le u_{n+1} \le 4$		
		$2 \le u_n \le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \le -\frac{4}{u_n} \le -1$		
		بإضافة 5 نجد $3 \le 5 - \frac{4}{u_n} \le 4$ أي ان $3 \le u_{n+1} \le 4$ و منه $2 \le 3 \le u_{n+1} \le 4$ إذن $2 \le u_{n+1} \le 4$		
	0.5	من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \le u_n \le 4$.		

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{35}{2}$	↗ $+\infty$

	0.5 1 0.5 0.5	2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . 3- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\dfrac{4-u_n}{2}$ لدينا $4-u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{u_n}\le\dfrac{1}{2}$, و منه $4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$. 4- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)\le\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\dfrac{1}{2^2}\left[\dfrac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن نصل إلى التعميم $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0\le 4-u_{n'}\le\dfrac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب . حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0\le 4-u_n\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$	
7) نقاط) :	1 +0.25 0.25	1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : $b=0$ و $a=1$ و $a=-3$ 2- ..... $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	التمرين الرابع

0.25

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

و شكل جدول تغيراتها :

0.25

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\frac{6}{e^3}$	↘	0

0.5

-3 كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.5

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$

1

-4 رسم (T) و (C_f)

-5 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

0.5

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ و $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$ أي ان

$f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$f(x)+2f'(x)+f''(x)=2e^{-x}$ يكافئ $f(x)=-2f'(x)-f''(x)+2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x)=-2f(x)-f'(x)-2e^{-x}$ أي

0.5

أي $F(x)=-2(x^2-3)e^{-x}-(-x^2+2x+3)e^{-x}-2e^{-x}$

و منه $F(x)=(-2x^2+6)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}-2e^{-x}$

$F(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$

6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ هي

1

$$A=\int_1^{\sqrt{3}}-f(x)dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}f(x)dx=\left[-F(x)\right]_1^{\sqrt{3}}+\left[F(x)\right]_{\sqrt{3}}^{3}=\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}$$

$$A=\left[\left(4+4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}}+2e^{-1}+(-14)e^{-3}\right]u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^2-3+me^x=0$$

0.25

المعادلة تكافئ $me^x=-\left(x^2-3\right)$ أي ان $-m=\left(x^2-3\right)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ ذو المعادلة $y=-m$

0.75

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $0<-m<\frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المفتشية العامة للبيداغوجية	المقاطعة الشرقية
امتحان البكالوريا التجريبي	لولاية عين الدفلى
دورة ماي 2017	الشعبة : تقني رياضي
اختبار في مادة الرياضيات	المدة : 4 ساعات

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التـاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقط)

في االفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2\,,1\,,2)$, $B(0\,,2\,,-1)$, $H(1\,,1\,,0)$

والمستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-2+6t \\ y=1-2t \\ z=4t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

2) بين أن (AB) و (Δ) لا ينتميان الى نفس المستوي.

3) ليكن (P) المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (Δ).

أ) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1\,,5\,,1)$ ناظمي للمستوي (P) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

جـ) أحسب المسافة بين المستوي (P) و المستقيم (Δ).

4) عين احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

5) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من االفضاء بحيث : $MA^2-MB^2=2$

- تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ).

التمرين الثـــاني : (04 نقط)

1) تحقق أن $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016}\equiv 1[7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=1+5+5^2+\cdots+5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=5^{n+1}-1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

جـ) بين أن $4S_{2015}\equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين اصغرعدد طبيعي n غيرمعدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عدد طبيعي غيرمعدوم , نعتبرفي $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^nx+S_ny=1$. تحقق أن $(5\,,-4)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثــالث : (05 نقط)

1) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0\ ,\ \pi[$ و z عدد مركب , $P(z)$ كثير حدود معرف بمايلي :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2cos\theta)z^2 + (1 - 2cos\theta)z - 1$$

أ) تحقق أن 1 جدر لـ $P(z)$.

ب)عين العددين الحقيقين a , b بحيث : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

جـ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$, ولتكن النقط A , B , C لواحقها z_A , z_B , z_C

على الترتيب حيث : $z_A = 1$, $z_B = -cos\theta + isin\theta$ و $z_C = -cos\theta - isin\theta$

أ) اكتب z_A , z_B , z_C على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي .

ب) حدد طبيعة المثلث ABC ثم عين قيمه θ حتى يكون قائم في A .

جـ) عين بدلالة θ لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

د) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$

3) نفرض $\theta = \frac{3\pi}{4}$, عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا .

التمرين الرابع : (07 نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1\ ,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + Ln(x+1)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1\ ,+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجا ل $]-1\ ,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{Ln(x+1)}{x+1}$, (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أحسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1\ ,+\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) استنتج أنه إذا كان $x \in [0\ ,4]$ فإن $f(x) \in [0\ ,4]$.

د) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) أرسم كلا من المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

III) (U_n) متتالية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بما يلي: $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كل من U_0 , U_1 , U_2 , U_3 .

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n \le 4$

3) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة استنتج أنها متقاربة ثم أحسب نهاية U_n عند $+\infty$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

2) أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $-2 < U_n < 1$

ب) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{U_n+2}{1-U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

جـ) احسب المجموع : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{5}{V_1} + \frac{5^2}{V_2} + \cdots + \frac{5^n}{V_n}$

التمرين الثاني : (04 نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ النقط $A(1\,,4\,,-5)$, $B(3,2,-4)$,
$C(5,4,-3)$ و $D(-2,8,4)$ و الشعاع $\vec{u}(1,5,-1)$.

1) بين أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D و يوازي $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة : $x - y - z - 7 = 0$

أ) بين أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي : $t \in R$ $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

ب) بين أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) أ) تعطى النقطتان $E\,(3,0,-4)$ و $F(-3,3,5)$, تحقق أن $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

ب) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي .

ج) عين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثالث : (05 نقط)

نعتبر كثير حدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

1) أ) بين أن $P(z)$ يقبل جذرا تخيلا صرفا يطلب تعيينه .

ب) عين العددين الحقيقيين a و b حيث $P(z) = (z - i)(z^2 + a\,z + b)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب الى معلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$ متعامد و متجانس. نعتبر النقط C , B , A ذات اللواحق على الترتيب:

$Z_C = \overline{Z}_B \quad , \quad Z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad , \quad Z_A = i$

أ) بين أن النقط A , B , C تنتمي الى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) بين أن OABC معين.

3) نضع $Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ لاحقة النقطة A_1 . Z_n لواحق النقط A_n حيث $Z_n = (Z_1)^n$ ولتكن النقطة A_0 صورة العدد المركب 1.

أ) احسب Z_2 ثم مثل النقط A_0 , A_1 , A_2 في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$, (الوحدة $2\ cm$)

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n النقط A_n تنتمي الى الدائرة (C) .

جـ) برهن أن : $Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

د) استنتج طويلة $Z_{n+1} - Z_n$ ثم المسافة A_nA_{n+1} ثم أثبت أن المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع.

4) نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z + i\sqrt{3}$

أ) عين طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميزة.

ب) عين وانشئ صورة المثلث OA_1A_2 بالتحويل f .

التمرين الرابع : (07 نقط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

1) ادرس اتجاه تغيرالدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1\ cm$).

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغيرالدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

جـ) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الأول

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

0.5

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ x = 1 + \alpha \quad , \quad \alpha \in R \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases}$$

ب) $\vec{u}_{(\Delta)}(6,-2,4)$ شعاع توجيه (Δ)

$\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}_{\Delta}$ غير مرتبطين لأن

0.25

$$\frac{6}{-2} \neq \frac{-2}{1}$$

ندرس التقاطع

$$\begin{cases} 2 - 2\alpha = -2 + 6t \\ 1 + \alpha = 1 - 2t \\ 2 - 3\alpha = 4t \end{cases}$$

نجد $t = 2$

0.25

بالتعويض في الجملة (1) نجد

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \alpha = -4 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ تناقض

ومنهα ليس وحيد اذن المستقيمان(AB) و (Δ)غير متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي

-2 (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) معناه

أ) تحقق ان $\vec{n}\ (1,5,1)$ ناظمي للمستوي (P)

0.5

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\vec{n}.\ \vec{u}_{\Delta} = 0$

ب) معادلة المستوي (P) :

$\vec{n}$ ناظمي لـ (P) معناه

(P): $x + 5y + z + d = 0$

بما أن $A \in (P)$ معناه :

$2 + 5(1) + 2 + d = 0$

0.5

$d = -9$

ومنه

(P): $x + 5y + z - 9 = 0$

ج) حساب المسافة بين (P) و(Δ)

0.5

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{|-2+6t+5(1-2t)+4t|}{\sqrt{1^2+5^2+1^2}}$$

$$d\big((\Delta),(P)\big) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

-3 احداثيات I منتصف $[AB]$

0.25

$I\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

معادلة المستوي (Q) المحوري للقطعة $[AB]$

$-2x + y - 3z + d = 0$

(Q)يشمل النقطة I

$d = 2$

ومنه معادلة المستوي المحوري هي :

0.5 $(Q): -2x + y - 3z + 2 = 0$

-4 $MA^2 - MB^2 = 2$

التحقق أن النقطة H تنتمي إلى (Γ) معناه :

$HA^2 = 5$

$HB^2 = 3$

0.25 $HA^2 - HB^2 = 5 - 3 = 2$

ومنه $H \in (\Gamma)$

طبيعة المجموعة (Γ) حيث :

$MA^2 - MB^2 = 2$

$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 2$

$\left(2\,\overrightarrow{MI}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\right) = 2$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI}\right) = 1$

تكافئ

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$

0.5 بما أن$H \in (\Gamma)$ معناه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI} = 1$ ومنه نعوض نجد :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} + 1 = 1$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH} = 0$

وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشملH و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له

التمرين الثاني (04 نقط)

-1

0.25 $5^6 = 15625$

$5^6 \equiv 1\,[7]$

ندرس بواقي قسمة 5^n على 7

0.25 $5^0 \equiv 1[7] \quad ,5^1 \equiv 5[7] \quad ,5^2 \equiv 4[7]$

$5^3 \equiv 6[7] \quad ,5^4 \equiv 2[7] \quad ,5^5 \equiv 3[7]$

$5^6 \equiv 1[7]$

دورية و دورها $k = 6n$

$5^6 \equiv 1[7]$

0.25 $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$

$2016 = 6 \times 336 = 6n$

-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعيn و $4S_n = 5^{n+1}$ لذلك نحسب

$S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ldots 5^n$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$

0.25 $S_n = 1\left(\frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$

و منه

0.25 — $4S_n = 5^{n+1} - 1$

لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$

تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

0.25 — يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$

ومنه 5^n , S_n أوليان فيما بينهما

ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$

لدينا

0.25 — $4S_n \equiv a\ [7]$

نضرب في 2

$8S_n \equiv 2a\ [7]$

$8 \equiv 1\ [7]$

ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$

العكس :

بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\,S_n \equiv a\ [7]$

لدينا

$S_n \equiv 2a\ [7]$

نضرب في العدد 4

$4S_n \equiv 8a\ [7]$

0.25 — $8a \equiv a\ [7]$

$4\,S_n \equiv a\ [7]$

جـ) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه

$4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$

0.25 — $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7

لدينا حسب ما سبق:

$4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$

0.25 — فان

$S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$

ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0

د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n

معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$

$5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$

0.5 — $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$

$5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$

$n+1 = 0, \quad n = -1,$ مرفوضة -1

$n+1 = 6, \quad n = 5$, وهو المطلوب

$S_n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

3- حلول المعادلة (E) هي :

01 — $(x, y) = (KS_n + 5\ , -K \times 5^n - 4)\ , \quad K \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث(05 نقط)

-1

0.25 — أ) $P(1) = 0$

ب)

0.5 — $\begin{cases} a = 2\cos\theta \\ b = 1 \end{cases}$

ج) حلول المعادلة هي:

0.5 — $S = \{1; -\cos(\theta) + i\sin(\theta); -\cos(\theta) - i\sin(\theta)\}$

2- أ) الشكل المثلثي :

.025 — $Z_A = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$\cos\ (\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin\ (\pi - \theta) = \sin\theta$

.025 — $Z_B = \cos(\pi - \theta) + i\sin\ (\pi - \theta)$

$Z_C = \overline{Z_B}$

.025 — ومنه $Z_C = \cos(-\pi + \theta) + i\sin\ (-\pi + \theta)$

الشكل الأسي:

$Z_A = e^{2i\pi}$

.075 — $Z_B = e^{i(\pi - \theta)}$

$Z_C = e^{i(-\pi + \theta)}$

بـ) طبيعة المثلث ABC

.025 — $|AC| = [Z_C - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

.025 — $|AB| = [Z_B - Z_A] = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$

ومنه المثلث متساوي الساقين

.025 — نعين θ حتى يكون المثلث ABC قائم في A :

.025 — الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 0$ نجد $\theta = \frac{\pi}{2}$

جـ) $Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$

.025 — $Z_G = \frac{1 - 2\cos\theta}{3}$

د) المجموعة (Γ) حيث :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$

معناه $MG = MO$

0.5 — ومنه (Γ) محور القطعة $[OG]$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC

3- قيم العدد الطبيعي n حتى يكون :

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$

$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا معناه $\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ حقيقيا

أي $sin\frac{n\pi}{2} = 0$

0.5 — ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$

و بالتالي: $n = 2k$ مع $k \in N$

التمرين الرابع (07 نقط)

I.

1) المشتقة:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$ 0.25

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: 0.25

$g'(x) > 0$

ومنه الدالة متزايدة تماما

جدول التغيرات: 0.25

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	↗

0.25

2) حساب : $g(0) = 0$ 0.25

اشارة: $g(x) > 0$ لما $x \in]0,+\infty[$

$g(x) < 0$ لما $x \in]-1,0[$

II.

1) النهايات: 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x) = +\infty$ 0.25

$x = -1$ مستقيم مقارب

2) 0.5

أ) حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$ 0.25

ب) $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$ ومن ثم الدالة f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-1,0]$

جدول التغيرات 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ج) لدينا: $0 \le x \le 4$ 0.25

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,4]$ فان

: $f(0) \le f(x) \le f(4)$

$$0 \le f(x) \le 4 - \frac{ln5}{5} \le 4$$ 0.25

د) $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى:

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x] = 0$

دراسة الوضعية: 0.25

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$		$-$
الوضعية	أعلى	يقطع	أسفل

3) التمثيل البياني (C_f) و (Δ)

4) حساب مساحة الحيز

0.25 $A = \int_0^1 (x - f(x))\, dx$

0.25 $= \int_0^1 \frac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x+1}\, dx$

0.25 $= \frac{1}{2}[[\mathrm{Ln}(x+1)]^2]_0^1$

$= \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}(2))^2$

III.

2) باستعمال البرهان بالتراجع:

نتحقق من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 4$:

$0 \le U_0 \le 4$

0.75 نفرض أن: $0 \le U_n \le 4$

بما أن الدالة متزايدة على المجال $[0,4]$ فان:

$f(0) \le f(U_n) \le f(4)$

$0 \le f(U_n) \le 4$

حسب النتيجة 2) جـ) فان: $0 \le U_{n+1} \le 4$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $0 \le U_n \le 4$

0.25 3) المتتالية (U_n) متناقصة لأن من أجل كل x من $[0,+\infty[$

$f(x) - x \le 0$

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \le U_n \le 4$

0.25 فان: $f(U_n) - U_n \le 0$ أي $U_{n+1} - U_n \le 0$

لدينا المتتالية (U_n) متناقصة و محدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

المتتالية (U_n) متقاربة ومنه:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

و بما أن $U_{n+1} = f(U_n)$

0.25 والدالة f مستمرة على المجال $]-1,+\infty[$ فان:

$f(l) = l$

ومنه $f(l) - l = 0$

و حسب ما سبق $l = 0$ بالتالي

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

0.5

0.5

0.25

$u_3\ u_2\ u_1\ u_0$

التمثيل البياني للتمرين الرابع للموضوع الأول



الحل النموذجي و سلم التنقط

الشعبة : تقني رياضي **بكالوريا التجريبي 2017**

الموضوع الثاني

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

$$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4} \quad ; \qquad U_0=\frac{1}{4}$$

تعيين a و b في :

$$U_{n+1}=a+\frac{b}{U_n+4}$$

و منه :

$$U_{n+1}=\frac{a(U_n+4)+b}{U_n+4}$$ 0.5

$$\begin{cases}a=3\\b=-10\end{cases}\begin{cases}a=3\\4a+b=2\end{cases}$$

$$U_{n+1}=3-\frac{10}{U_n+4}$$

-2

أ) باستعمال البرهان بالتراجع

$$-2<U_n<1$$

نتحقق:

$$P(0):\ -2<U_0<1$$

نفرض: 0.75

$$-2<U_n<1$$

نبرهن أنها صحيحة ن أجل $n+1$

ب) المتتالية U_n متزايدة تماما على N لان:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n+2)}{U_n+4}$$

وبما أن $U_n<1$ فإن $U_n-1<0$ و

$U_n>-2$ فإن $U_n+2>0$ فان 0.75

وعليه فان: $-(U_n-1)(U_n+2)>0$:

ولدينا كذلك $U_n+4>0$ ومن ثم فإن

$$U_{n+1}-U_n>0$$

جـ) المتتالية (U_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 0.25

3) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدها الأول $U_0=3$ 0.5

ب) $V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$ 0.25

$$U_n=\frac{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$ 0.25

ج) حساب المجموع:

$$V_0=3$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

. 0.25

$$V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

نعوض نجد :

0.5 $$S_n=\frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots+2^n)$$

$$S_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$$

التمرين الثاني (04 نقط)

0.75 (1 $A\in(ABC)$; $B\in(ABC)$; $C\in(ABC)$

0.5 (2 $\begin{cases}x=k-2\\y=5k+8\\z=-k+4\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

(3

0.5 أ) نحل الجملة $\begin{cases}x-2z-11=0\\x-y-z-7=0\end{cases}$

ب) ندرس التوازي :

$\vec{u}(1,5,-1)$, $\vec{v}(2,1,1)$, $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$ ومنه (T) و

0.25 (Δ) غير متوازيان.

ندرس التقاطع معناه نحل الجملة:

$$\begin{cases}2t+11=k-2\\t+4=5k+8\\t=-k+4\end{cases}$$

0.5

نعوض t في المعادلة 2 نجد $k=0$ ثم نعوض في المعادلة 3 نجد $t=4$ ثم نعوض هذه القيم في المعادلة1 نجد : $-2=19$ و هذا مستحيل.

إذا (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

-4 أ)

0.25 $E\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}3=11+2t\\0=4+t\\-4=t\end{cases}$

$\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-4\end{cases}$ نجد t وحيد

$F\in(T)\Leftrightarrow\begin{cases}-3=k-2\\3=5k+8\\5=4-k\end{cases}$

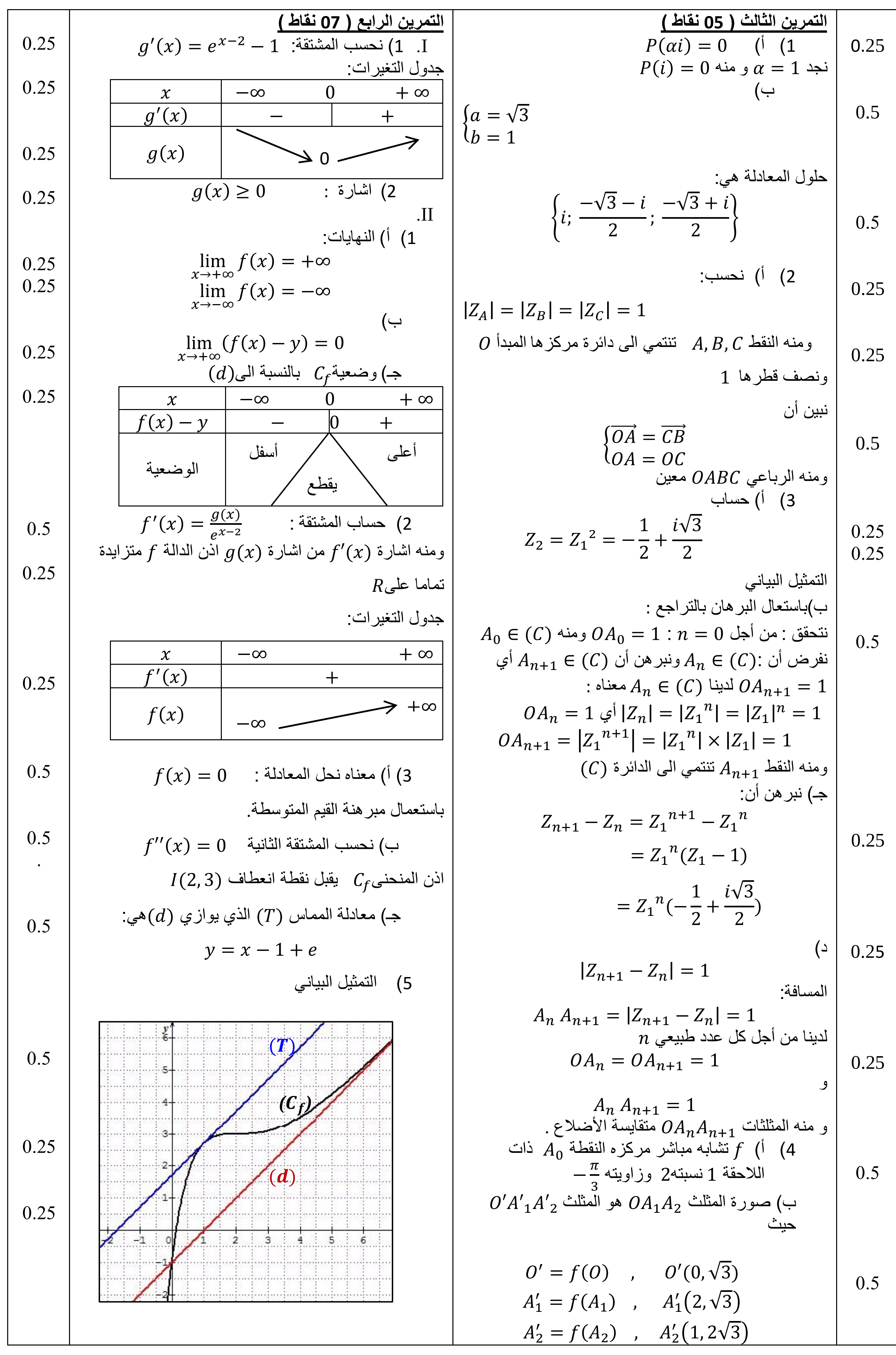
0.25 $\begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=-1\end{cases}$ نجد k وحيد

0.5 ب) (Γ) : $-6x+3y-9z+54-\alpha=0$

و هي معادلة ديكارتيه للمستوي الذي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

0.5 جـ) $I\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ منتصف القطعة $[EF]$.

$I\in(\Gamma)$ بعد التعويض نجد $\alpha=63$



التمرين الثالث (05 نقاط)

1) أ) $P(\alpha i)=0$ — 0.25

نجد $\alpha=1$ و منه $P(i)=0$

ب) — 0.5

$$\begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$$

حلول المعادلة هي: — 0.5

$$\left\{ i;\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right\}$$

2) أ) نحسب: — 0.25

$$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=1$$

ومنه النقط A,B,C تنتمي الى دائرة مركزها المبدأ O — 0.25

ونصف قطرها 1

نبين أن — 0.5

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB} \\ OA=OC \end{cases}$$

ومنه الرباعي $OABC$ معين

3) أ) حساب — 0.25 — 0.25

$$Z_2={Z_1}^2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

التمثيل البياني

ب)باستعمال البرهان بالتراجع : — 0.5

نتحقق : من أجل $n=0$: $OA_0=1$ ومنه $A_0\in(C)$

نفرض أن: $A_n\in(C)$ ونبرهن أن $A_{n+1}\in(C)$ أي

$OA_{n+1}=1$ لدينا $A_n\in(C)$ معناه :

$$OA_n=1 \text{ أي } |Z_n|=|{Z_1}^n|=|Z_1|^n=1$$

$$OA_{n+1}=|{Z_1}^{n+1}|=|{Z_1}^n|\times|Z_1|=1$$

ومنه النقط A_{n+1} تنتمي الى الدائرة (C)

جـ) نبرهن أن: — 0.25

$$Z_{n+1}-Z_n={Z_1}^{n+1}-{Z_1}^n$$

$$={Z_1}^n(Z_1-1)$$

$$={Z_1}^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

د) — 0.25

$$|Z_{n+1}-Z_n|=1$$

المسافة:

$$A_n\,A_{n+1}=|Z_{n+1}-Z_n|=1$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n — 0.25

$$OA_n=OA_{n+1}=1$$

و

$$A_n\,A_{n+1}=1$$

و منه المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع .

4) أ) f تشابه مباشر مركزه النقطة A_0 ذات اللاحقة 1 نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ — 0.5

ب) صورة المثلث OA_1A_2 هو المثلث $O'A'_1A'_2$ حيث — 0.5

$$O'=f(O)\quad,\quad O'(0,\sqrt{3})$$

$$A'_1=f(A_1)\quad,\quad A'_1(2,\sqrt{3})$$

$$A'_2=f(A_2)\quad,\quad A'_2(1,2\sqrt{3})$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x)=e^{x-2}-1$ — 0.25

جدول التغيرات: — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

0.25

2) اشارة : $g(x)\geq 0$ — 0.25

II.

1) أ) النهايات: — 0.25 — 0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

ب) — 0.25

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$$

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d) — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-2}}$ — 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R — 0.25

جدول التغيرات: — 0.25

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x)=0$ — 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x)=0$ — 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d)هي: — 0.5

$$y=x-1+e$$

5) التمثيل البياني — 0.5 — 0.25 — 0.25

5) <u>المناقشة البيانية:</u> $f(x) = x + m$

$m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

$m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم

$-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما — 0.5

$m = e - 1$ حلا واحدا موجبا

$m = e - 1$ ليس لها حلول

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع :

$U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ — 0.5

$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$

ب) حساب A:

$$A = \int_0^2 (f(x) - y\,)dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 xe^{2-x}\,dx$$ — 0.5

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3)\ cm^2$$

مديرية التربية لولاية تيسمسيلت	ثانوية: ابن خلدون – العيون
المستوى: 3 تـ ر — يوم 15 – 05 – 2017	المدة: 4 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضـــــوع الاول

التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;1)$،$B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1. تحقق ان النقط A، B و C لاتعين مستويا وحيدا
2. (P_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، (m عدد حقيقي)

ا) بين ان (P_m) مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

ب) بين ان جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. ا) احسب احداثيات النقطة H المعرفة بـ $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$:(e اساس اللوغارتم النيبيري)

ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

4. ا) اوجد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}.(1+e)$

ب) اوجد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S)

التمرين الثاني(05):

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0 \;\ldots\ldots (I)$

- اكتب الحلول على الشكل المثلثي

2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط ،و التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$، $z_C=\overline{z_B}$ وليكن العدد المركب L حيث : $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$

ا) اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف

3. ا) بين انه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C ، يطلب تعيين زاويته .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته

4. ا) عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

ب) عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

التمرين الثالث(04):

1. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln x$. ادرس تغيرات الدالة f
2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$

احسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها

3. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

ا) اثبت ان : $v_n = n - n\ln(n)$

ب) باستعمال الدالة f ، ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 < u_n \leq e$

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين الرابع(07):

الجزء 1 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$حيث الوحدة 2cmعلى محور الفواصل و5cm على محور التراتيب

1. احسب نهاية الدالة f عند$-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا
2. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

   ب) احسب نهايةf عند$+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا
3. نعتبر على المجال$]-1;+\infty[$ الدالةg المعرفة بـ : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

   ا) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

   ب) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(t)$ من اجل t موجب تماما
4. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقيx : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

   ب) استنتج انf متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

   ج) انشئ (C_f)

الجزء 2 :

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال$[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. تحقق انه من اجل كل عدد حقيقيt : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين ان : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$
3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f)والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = \ln 4$ ، $x = 0$

مديرية التربية لولاية تيسمسيلت	ثانوية: ابن خلدون – العيون

المستوى: 3 ت ر   يوم 15 – 05 – 2017   المدة: 4 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول(3.5):

نعتبر المعادلة $(E): 3x - 8y = 5$ حيث x و y صحيحان نسبيان

1) اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x = 8k - 1$، $y = 3k - 1$ و $k \in \mathbb{Z}$

2) ا) لتكن n، x و y ثلاثة اعداد صحيحة تحقق $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ اثبت ان $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

ب) نعتبر الجملة $(S) \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح . اثبت ان n حل للجملة (S) اذا وفقط اذا كان $n \equiv 23[24]$

3) تأكد ان 2015 حل للجملة (S) ثم استنتج ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24

التمرين الثاني(4.5):

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس نعتبر النقط $A(-2;-1;3)$، $B(1;3;5)$، $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$ و $D(2;-2;-3)$، $E(1;-1;2)$، $F(1;-1;1)$ والمستقيم (Δ) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $t \in]0;+\infty[$; $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases}$

1. ا) بين ان النقط A، B، C تعين مستويا (ABC)

ب) تحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له

2. ا) اوجد $\vec{u}$ احد اشعة توجيه المستقيم واحداثيات نقطة منه (Δ)

ب) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) اوجد EM^2 بدلالة t

ج) اوجد اصغر قيمة EM^2 ثم استنتج المسافة بين النقطة E والمستقيم (Δ) و استنتج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ)

د) اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس المستقيم (Δ)

3. ا) بين ان المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثالث(05):

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

1. ا) احسب العدد المركب $\left(\sqrt{3} + i\right)^2$ ثم استنتج في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلتين : $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ و $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

ب) تحقق انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z) = \left(z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i\right)$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A،B، C وD ذات اللاحقات $z_A = \sqrt{3} + i$
، $z_B = -1 + \sqrt{3}i$، $z_C = -z_A$و$z_D = -z_B$ على الترتيب

ا) اكتب الاعداد المركبة A،B، C وD على الشكل الاسي .

ب) علم النقط A،B، C وD ثم بين انها تنتمي الى الدائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

ج) بين ان : $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$واستنتج طبيعة المثلث ABD

3. نعتبر التحويل النقطيT في المستوي الذي يرفق بكل نقطةM ذات اللاحقةz النقطة M' ذات اللاحقة $'$ حيث $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل Tمحددا عناصره المميزة

ب) تحقق ان $T(A) = B$، $T(B) = C$ و $T(C) = D$

ج) بين انه من اجل كل عدد مركبz : $P(z') = P(z)$

د) احسب $P(z_A)$ ثم استنتج مرة اخرى حلول المعادلة $P(z) = 0$

التمرين الرابع(07):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال$[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2 + 1) & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. وليكن (C_f)تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$

.I .

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند0 ثم فسر النتيجة هندسيا

3. ادرس اتجاه تغيرات الدالةf ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيدα بحيث$\alpha \geq 0$: $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق ان : $4.6 < \alpha < 4.7$

5. اكتب معادلة للمستقيم(D) المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 1

.II g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1. احسب $g'(x)$و$g''(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالةg' واستنتج اشارتها على المجال $]0;+\infty[$

2. حدد اتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f)بالنسبة الى (D)

3. انشئ (D)و (C_f)

.III .

1. من اجل كل عدد طبيعيn غير معدوم نضع : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

- احسب I_nبدلالةn باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة$A(n)$ بـcm^2للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)والمماس (D)والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

التنقيط	التصحيـــح المفصل

التمرين 01:

1. التحقق ان النقط A،B و C لاتعين مستويا وحيدا: **(0.5)**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

بما ان: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ فان الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقط A،B و C على استقامة واحدة ومنه النقط A،B و C تعين ملا نهاية من المستويات وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث

2. $P(m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، m عدد حقيقي

ا) نبين ان $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m: **(0.5)**

لدينا من اجل كل m من $\mathbb{R}$ الثلاثية $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$ ومنه $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي m

ب) نبين ان جميع المستويات $P(m)$ تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له: **(0.75)**

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ يكافئ

$(-y+2z+4)+m(x-z+1)=0$

يكافئ $(-y+2z+4)=0$ و $(x-z+1)=0$

منه (Δ) معرف بالجملة: $\begin{cases}x-z+1=0\\-y+2z+4=0\end{cases}$ اي ان $\begin{cases}x=-1+z\\y=4+2z\end{cases}$ بوضع $z=t$ ، t عدد حقيقي

ومنه التمثيل الوسيطي لـ(Δ) هو: $\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t \quad ; \quad t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

3. ا) حساب احداثيات النقطة H حيث: **(0.5)**

$2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

بما ان: $2-1+e\neq0$ فان النقطة H موجودة ووحيدة هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;e)\}$

$\begin{cases}x_H=\frac{2x_A-x_B+ex_C}{2-1+e}=0\\y_H=\frac{2y_A-y_B+ey_C}{2-1+e}=1\\z_H=\frac{2z_A-z_B+ez_C}{2-1+e}=1\end{cases}$ ومنه $H=C(0;1;1)$

ب) المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ): لتكن النقطة H' المسقط العمودي (Δ)، شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}x_{H'}\\y_{H'}-1\\z_{H'}-1\end{pmatrix}$ **(0.5)**

معناه $\begin{cases}\overrightarrow{HH'}.\vec{u}=0\\H'\in(\Delta)\end{cases}$

: $\begin{cases}x_{H'}+2y_{H'}+z_{H'}-3=0\\x_{H'}=-1+t\\y_{H'}=4+2t \quad ;(t\in\mathbb{R})\\z_{H'}=t\end{cases}$ معناه: $t=-\frac{2}{3}$

ومنه $H'\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$d(H;(\Delta))=HH'=\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ا) ايجاد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}(1+e)$ **(0.5)**

معناه $\|(2-1+e)\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}(1+e)$ معناه: $\|\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}$ ومنه (S) سطح كرة مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{5}$

ب) ايجاد المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S) **(0.75)**

المستويات (P_m) تمس المجموعة (S) معناه:

$d(H;(P_m))=\sqrt{5}$

$d(H;(P_m))=\frac{|mx_H-y_H+(2-m)z_H+m+4|}{\sqrt{m^2+1+(2-m)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}$

$\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\sqrt{5}$ معناه: $\sqrt{5}\sqrt{2m^2-4m+5}=5$

معناه: $m^2-2m=0$ معناه $m=0$ او $m=2$ ومنه:

$(P_0):-y+2z+4=0$ او $(P_2):2x-y+6=0$

التمرين 02:

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ **(0.5)**

$\Delta=-4$ ومنه $z_1=\sqrt{3}-i$ او $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه

$S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي: **(0.5)**

$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ،

$z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) كتابة العدد L على الشكل الاسي ثم حساب L^{2016} **(0.5)**

لدينا: $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ومنه: $L=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ **(0.5)**

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i168\pi}$

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف: **(0.5)**

لدينا: $L=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، $L^n=\sqrt{2}^n e^{i\left(n\frac{\pi}{12}\right)}$

L^n عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه

$n=12k+6$ ، $k\in\mathbb{N}$

1) ا) نبين انه يوجد دوران r مركزه النقطة B و يحول A الى C يطلب تعيين زاويته : 0.5

ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث b،a عددان مركبان

لدينا معناه $\begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases}$ ومنه : $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$b = z_B(1 - a) = 2\sqrt{3}$

ومنه : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3}$ بما ان : 0.5

$|a| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

فان r هو دوران مركزه B وزاويته $arg(a) = \frac{2\pi}{3}$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته 0.5

لدينا : $AB = BC$ و $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ اذن

المثلث ABC متقايس الاضلاع

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'} = \frac{z_B + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$[BB']$ ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق بـ : $[AC]$ في 0.5

المثلث ABC المتقايس الضلعين مساحته $S = \frac{BB' \times AC}{2}$

$AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$ ، $BB' = |z_{B'} - z_B| = 1$

ومنه : $S = \sqrt{3}ua$

1) ا) تعيين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب : لدينا $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i} = \frac{z-z_C}{z-z_A}$

$\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ 0.75

ومنه $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}) = 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$ ومنه (E_1) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$

ب) تعيين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$ 0.75

لدينا : $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ اي $iz = i(i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta})$

اي ان : $z = \sqrt{3} + i + 2e^{i\theta}$

$z = z_B + 2e^{i\theta}$ ، θ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه : (E_2) هي دائرة مركزها النقطة B ونصف قطرها 2

التمرين 03 :

1) دراسة تغيرات الدالة f 0. 5

$f'(x) = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	↗	0	↘	$-\infty$

0.5

احسب الحدود : u_1، u_2، u_3، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول اتجاه 0.5

1) $u_1 = e \approx 2.71$، $u_2 = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$

$u_3 = \frac{e^3}{27} \approx 0.74$، $u_4 = \frac{e^4}{256} \approx 0.21$ 0.25

$u_5 = \frac{e^5}{3125} \approx 0.05$، متناقصة ونهايتها 0 0.25

ا) اثبات ان : $v_n = n - n\ln(n)$

1) ا) $v_n = \ln n = n - n\ln n$ 0.5

ب) ادرس اتجاه تغير (v_n) ثم استنتج ان (u_n) متناقصة:

$v_n = f(n)$ والدالة f متناقصة على المجال $[1;+\infty[$

وبالتالي (v_n) متناقصة وبما ان $u_n = e^{v_n}$ والدالة الاسية 0.5

متزايدة فان اتجاه تغير (u_n) هو اتجاه تغير (v_n) اي (u_n)

متناقصة 0.25

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 < u_n \le e$

بما ان (u_n) متناقصة فان $u_n \le u_0 = e$ ولدينا

$e^n > 0$ و $n^n > 0$ وبالتالي $u_n > 0$ اي $0 < u_n \le e$ 0.5

د) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

(u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة . 0.25

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ اي

$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ 0.5

التمرين 04 :

الجزء 1 : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\right]$ بوضع

$t = e^x$ نجد : $\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1$ ومنه 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$ 0.25

3) ا) لدينا من اجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = e^{-x}[\ln e^x + \ln(e^{-x} + 1)]$ ومنه

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$ 0.5

ب) حساب نهاية f عند $+\infty$ وتفسيرها هندسيا :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لان

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})\right] = 0$ 0.25

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$ 0.25

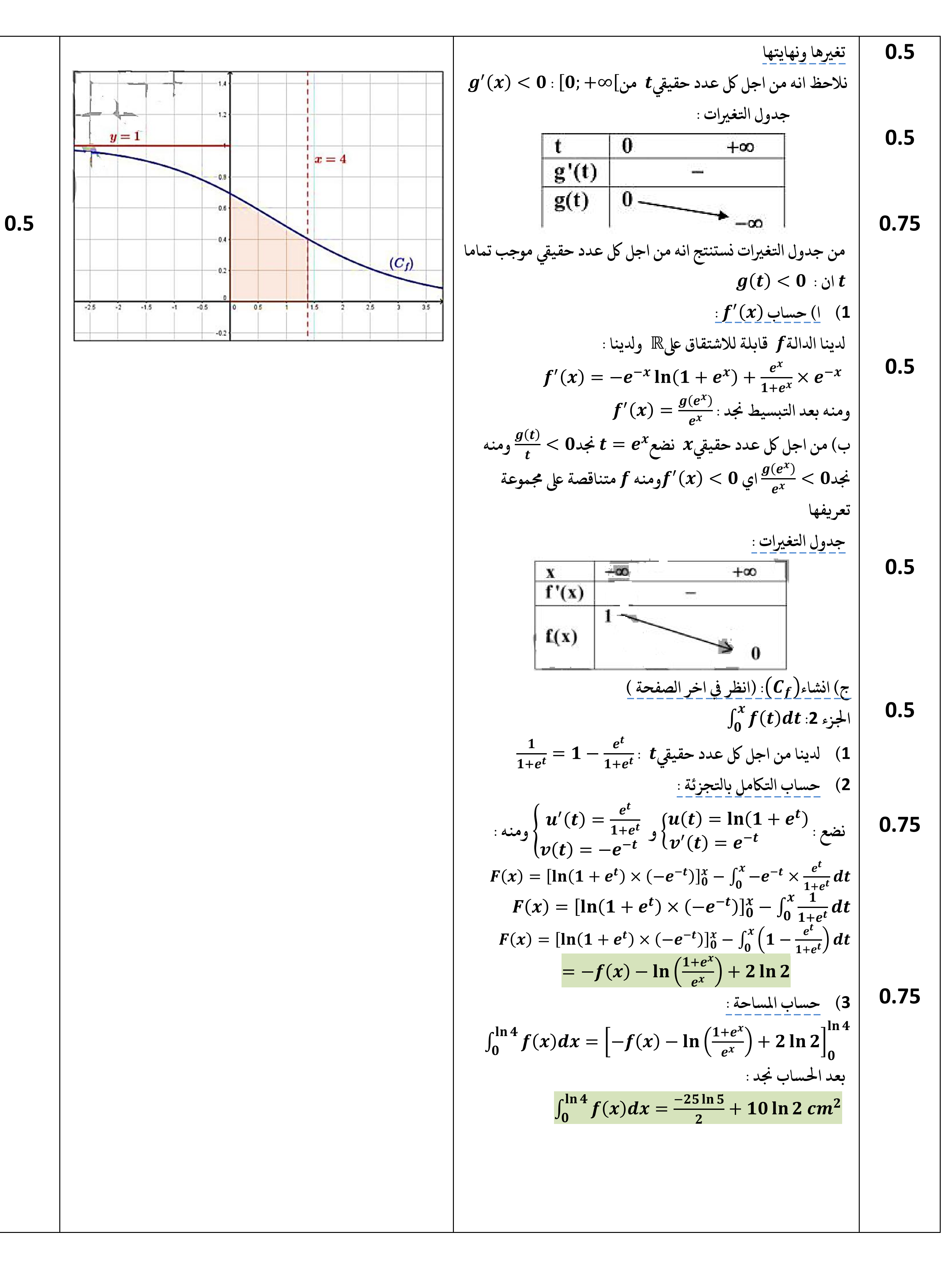
4) $g(x) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ ، $D_g =]-1;+\infty[$

ا) دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

من اجل كل عدد حقيقي t من $[0;+\infty[$ ولدينا :

$g'(x) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$ 0.25



العلامة		الحل	العلامة
0.5	(انظر الشكل أعلاه)	تغيرها ونهايتها نلاحظ انه من اجل كل عدد حقيقي t من $[0;+\infty[$: $g'(x)<0$ جدول التغيرات :	0.5

t	0 $+\infty$
$g'(t)$	$-$
$g(t)$	0 ↘ $-\infty$

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما t ان : $g(t)<0$

1) ا) حساب $f'(x)$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\times e^{-x}$$

ومنه بعد التبسيط نجد : $f'(x)=\frac{g(e^{x})}{e^{x}}$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x نضع $t=e^{x}$ نجد $\frac{g(t)}{t}<0$ ومنه نجد $\frac{g(e^{x})}{e^{x}}<0$ اي $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة على مجموعة تعريفها

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 ↘ 0

ج) انشاء (C_f) : (انظر في اخر الصفحة)

الجزء 2: $\int_0^x f(t)dt$

1) لدينا من اجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^{t}}=1-\frac{e^{t}}{1+e^{t}}$

2) حساب التكامل بالتجزئة :

نضع : $\begin{cases}u(t)=\ln(1+e^{t})\\ v'(t)=e^{-t}\end{cases}$ و $\begin{cases}u'(t)=\frac{e^{t}}{1+e^{t}}\\ v(t)=-e^{-t}\end{cases}$ ومنه :

$$F(x)=[\ln(1+e^{t})\times(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x -e^{-t}\times\frac{e^{t}}{1+e^{t}}dt$$

$$F(x)=[\ln(1+e^{t})\times(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x \frac{1}{1+e^{t}}dt$$

$$F(x)=[\ln(1+e^{t})\times(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x\left(1-\frac{e^{t}}{1+e^{t}}\right)dt$$

$$=-f(x)-\ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right)+2\ln 2$$

3) حساب المساحة :

$$\int_0^{\ln 4}f(x)dx=\left[-f(x)-\ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right)+2\ln 2\right]_0^{\ln 4}$$

بعد الحساب نجد :

$$\int_0^{\ln 4}f(x)dx=\frac{-25\ln 5}{2}+10\ln 2\ cm^2$$

العلامات في العمود الأيمن: 0.5، 0.5، 0.75، 0.5، 0.5، 0.5، 0.75، 0.75 — العمود الأيسر: 0.5

عبـــد اللـــه علي

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي الموضوع الثاني ثالثة تقني رياضي

التنقيط	التصحيح المفصل

التمرين 01 :

1. اثبت ان حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x = 8k - 1$، $y = 3k - 1$ و $k\epsilon\mathbb{Z}$

ومنه : $3(x+1) = 8(y+1)$

0.5

3 يقسم الجداء $8(y+1)$ واولي مع 8 فهو يقسم $y+1$

يعني $y = 3k - 1$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$ وبتعويض في نجد $x = 8k - 1$

0.5

$\begin{cases} n = 3x+2 \\ n = 8y+7 \end{cases}$ يستلزم $3x + 2 = 8y + 7$ يعني

$3x - 8y = 5$ ومنه $(x;)$ حل للمعادلة (E)

2. ا) اثبات ان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) :

0.75

$\begin{cases} n = 3x+2 \\ n = 8y+7 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

ب) اثبت ان n حل للجملة (S) اذا وفقط اذا كان $n \equiv 23[24]$

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) حسب السؤال 2 ا) ومنه

$x = 8k - 1$ و $y = 3k - 1$ اذن

0.75

$n = 3x + 2 = 24k - 1$ يعني : $n \equiv -1[24]$ ومنه

$n \equiv 23[24]$

نفرض ان يعني ومنه $\begin{cases} n-2 = 24k+21 \\ n-7 = 24k+16 \end{cases}$ ومنه

0.75

$\begin{cases} n-2 = 3(7k+8) \\ n-7 = 8(8k+7) \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

3. ا) تأكد ان 2015 حل للجملة (S):

0.5

لدينا $2015 = 3 \times 671 + 2$ يعني $2015 \equiv 2[3]$ و

يعني $2015 = 8 \times 251 + 7$ ان $2015 \equiv 7[8]$

اذن $2015 \equiv 23[24]$ اذن $2015^{1436} \equiv (-1)^{1436}[24]$

0.5

اخيرا $2015^{1436} \equiv 1[24]$ اي $2015^{1436} - 1 \equiv 0[24]$

يعني ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24

التمرين 02 :

0.5

1. ا) اثبات ان النقط A، B، C تعين مستويا (ABC) لدينا

: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ بما ان $\frac{3}{4} \neq 8$ فان النقط A، B، C تعين مستويا

ب) التحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) نحسب

0.5

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 6 - 8 + 2 = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 8 - 7 - 1 = 0$

اذن محققة

0.5

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$2x - 2y + z = 1$

1) ا) ايجاد $\vec{u}$ احد اشعة توجيه المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي

0.75

هو $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ x = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases}$; $t\epsilon]0;+\infty[$ يكافئ

$\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -1 + \ln(t) \\ z = 1 + \ln(t) \end{cases}$; $t\epsilon]0;+\infty[$ بوضع

نجد $k\epsilon\mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$ ومنه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L(1;-1;1)$ هي نقطة من (Δ)

ب) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) ايجاد EM^2 بدلالة t

0.5

$EM^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$ ومنه

$EM^2 = (\ln(t))^2 + (\ln(t))^2 + (\ln(t) - 1)^2$ اي

$EM^2 = 3(\ln(t))^2 - 2\ln(t) + 1$

ج) ايجاد اصغر قيمة EM^2 نضع $EM^2 = f(t)$ وندرس اتجاه

0.25

تغير الدالة f نجد ان $f'(t) = \frac{2(3\ln(t)-1)}{t}$ تنعدم f' عند

$t = e^{\frac{1}{3}}$ وسالبة على المجال $\left]0; e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومنه f متناقصة على المجال

$\left]0; e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومتزايدة على المجال $\left]e^{\frac{1}{3}}; +\infty\right[$ اذن اصغر قيمة تصلها

EM^2 عندما $t = e^{\frac{1}{3}}$ اي $EM^2 = \frac{2}{3}$ ومنه المسافة بين النقطة E

والمستقيم (Δ) هي $\frac{2}{3}$

د) استنتاج احداثيات H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم

0.25

(Δ) نعوض في التمثيل الوسيطي $t = e^{\frac{1}{3}}$ هي $H\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

و) كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E ويمس

0.5

المستقيم (Δ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + \frac{16}{3} = 0$ يكافئ

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{2}{3}$

0.25

2) ا) تبيين ان المثلث ABC قائم في A لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ومنه

محققة

0.5

حساب مساحة المثلث ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{87}{4}$

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ نحسب

0.5

$d(D;(ABC)) = \frac{4}{3}$ ومنه الحجم

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} . d = \frac{87}{9}$

التمرين 03:

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$ — 0.25

$(\sqrt{3}+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$

استنتاج: $z^2 = 2+2\sqrt{3}i$ معناه: $z^2 = (\sqrt{3}+i)^2$ معناه: — 0.5

$z=\sqrt{3}+i$ او $z=-\sqrt{3}-i$

$z^2 = -2-2\sqrt{3}i$ معناه: $z^2 = \left(i(\sqrt{3}+i)\right)^2$

معناه $z=-1+\sqrt{3}i$ او $z = 1-\sqrt{3}i$

$S=\{-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;1-\sqrt{3}i;-1+\sqrt{3}i\}$

ب) التحقق: $P(z) = (z^2+2+2\sqrt{3}i)(z^2-2-2\sqrt{3}i)$ — 0.25

$= z^4+8-8\sqrt{3}i$

2. ا) اكتب الاعداد المركبة A، B، C و D على الشكل الاسي

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$، $z_B = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$، $z_C = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ — 0.5

$z_D = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$،

ب) تعليم النقط: — 0.5

$OA=OB=OC=OD=2$ ونصف قطر الدائرة هو 2 — 0.5

ج) $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ و $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A} = i$ ، $\frac{z_A-z_D}{z_A-z_B} = \frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ — 0.25

التفسير: $AD=AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين — 0.75

3. $T: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة — 0.5

T دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) التحقق: $T(A)=B$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_B$

$T(B)=C$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_C$

$T(C)=D$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$ — 0.5

ج) $P(z') = P\left(e^{i\frac{\pi}{2}}z\right) = (iz)^4+8-8\sqrt{3}i = P(z)$ — 0.25

د) $P(z_A)=0$ — 0.25

لدينا: $P(z_A)=P(z_B)$ ومنه $P(z_B)=0$

$P(z_B)=P(z_C)$ ومنه $P(z_C)=0$

$P(z_C)=P(z_D)$ ومنه $P(z_D)=0$ — 0.25

اذا حلول المعادلة $P(z)=0$ هي:

$S=\{-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;1-\sqrt{3}i;-1+\sqrt{3}i\}$

التمرين 04:

1. لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2+1\ ;x>0)$ و

$f(0)=1$ — 0.25

2. حساب نهاية f عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ — 0.25

3. دراسة قابلية اشتقاق f عند 0

من الواضح ان f غير قابلة للاشتقاق عند لانها ليست نعرفة على يسار 0 — 0.5

لندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 :

$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1-1}{x} = 0$

ومنه قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f

0.5 — حساب المشتق : الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

حيث: $f'(x) = x(3-2\ln x)-x$ ومنه

$f'(x) = 2x(1-\ln x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(1-\ln x)$ لان $2x>0$

$f'(x)\geq 0$ يكافئ $(1-\ln x)\geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 1$

اي $x\leq e$ اي $x\epsilon]0;e]$ اذن :

$x\epsilon]0;e]$ يكافئ $f'(x)\geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ونستنتج $x\epsilon[e;+\infty[$ يكافئ $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

1) تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث: $\alpha\geq 0$

0.5 — و$f(\alpha)=0$ من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $]e;+\infty[$ ومستمرة على هذا المجال ولدينا :

و $f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ اذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α وحيدا في المجال $]e;+\infty[$ يحقق $f(\alpha)=0$

التحقق ان: $4.6\leq\alpha\leq 4.7$ لدينا $f(4.7)\times$ و

$f(4.6)<0$ ومنه $4.6\leq\alpha\leq 4.7$

2) كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$(D): y = f'(x)(x-1)+f(1)$ ومنه:

0.5 — $(D): y = 2x+\frac{1}{2}$

ا. لدينا $g(x) = f(x)-2x-\frac{1}{2}$

حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث

0.5 — $g'(x) = f'(x)-2$: اي $g'(x) = 2x(1-\ln x)$

الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g''(x) = 2(1-\ln x)+2x\left(-\frac{1}{x}\right)$ اي

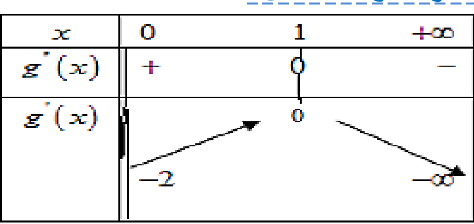
$g''(x) = -2\ln x$

دراسة اتجاه تغير g'

$g''(x) \geq 0$ يكافئ $-2\ln x \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 0$ يكافئ $0 < x \leq 1$ اذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$ 0.5

$g''(x) < 0$ يكافئ $-2\ln x < 0$ يكافئ $\ln x > 0$ يكافئ $x > 1$ اذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g' : 0.25



اشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$: 0.25

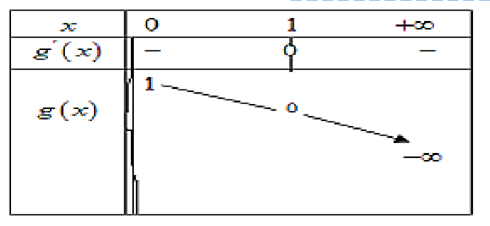
من جدول التغيرات الدالة g' نجد من اجل كل عدد حقيقي x:

$g'(x) \leq 0$ 0.25

4. تحديد اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1 . $g'(x) \leq 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :



0.5

من جدول تغيرات الدالة g نجد: $g(x) \geq 0$ من اجل $x\epsilon]0;1]$ ، $g(x) \leq 0$ من اجل $x\epsilon[1;+\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة الى يعود الى (D) دراسة اشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ اي اشارة $g(x)$

x	0		1		+∞
$g(x)$		+	0	−	
الوضعية		(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)	

0.5

5. انشاء (C_f) و (D) :

6. 1) حساب بدلالة باستعمال المكاملة بالتجزئة :

لدينا : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

نضع : $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ 0.75

اذن : $I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$

ومنه بعد التبسيط نجد : $I_n = \frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3} + \ln n\right) - \frac{1}{9}$

2) استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$:

بما ان $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ اي $0 < x < 1$ فان $f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$

حسب السؤال 2 من الجزء II اي من اجل $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ فان وبالتالي $f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$:

ولدينا : $A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right) dx$ 0.75

$f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x$

ومنه : $A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$ بعد التبسيط نجد :

$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{ln(n)}{n^3}\right) + \frac{1}{9}\right) \times 4cm^2$

حساب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n^3} = 0$ ومنه نجد :

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \frac{4}{9}$ 0.75

ثـا/ اول نوفمبـر54 + ثا/أبو بكر الصديق بالعطاف — الشعبـة 3 تقني رياضي +3 ريـاضي سلطان

امتحان البكالوريـا التجريبي — دورة مـــاي :2015

اختبـــار في مــادة الرياضيـــات — المـدة4 ساعـات

على التـلميذ أن يعـالج أحد الموضـوعين على الخيـار

الموضـوع الأول

التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ و ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. بين أن المستقيمين (AB) و(D) لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي (P) الذي يوازي (D) و يشمل (AB)
   - أ. بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
   - ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P)
   - ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من (D) و (P) ثابتة ، حدد هذا الثابت
   - د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) المعرف بتقاطع (P) و المستوي (Oxy)
   - ه. عين مجوعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   - و. لتكن (S) سطح كرة التي تمس (P) في النقطة $C(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن (P) بمسافة $d=6$ و يقع من جهة O ، عين معادلة ديكارتية لـ (S)
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي (OAB) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

   ب/ بين أن المستوي (OAB) و سطح الكرة (S) يتقاطعان و فق دائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$

   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013}=0$ و أكتب العدد $2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ و لتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5+2^{2015}y_{2015}$
   - أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = 2^{2015} y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث: Z_n لاحقة A_n

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^4 \times 3^n \right)^{\frac{n+1}{4}}$

التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) .... 5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د/ حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم (D)، (D') و (C)

5. ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) و المنحنى (C)

II. نضع : $I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد I

2. بين أنه من كل x من $[0;+\infty[$ ، $\ln(1+X)\le X$

3. استنتج أن: $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ و أعط حصرا للعدد I سعته $0,02$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

1. أ/ تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)$

ب/ استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D

ب/ حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل

ج/ بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما

3. لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$

حيث z_n لاحقة النقطة M_n و نضع : $U_n=\left|z_n-z_\Omega\right|$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ/ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب/ عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة

ج/ نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقية $[A\Omega],[M_1\Omega]...............,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$

- أحسب المجموع T_n بدلالة n

4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$

- حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$

التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$ ....(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

3. بين أن العددين x و y أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1)

4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17

5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$

2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي (P) ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $AM = CM$ هي المستوي (P') الذي معادلته الديكارتية $4y + 2z - 7 = 0$

ج/ بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;\alpha^2 - 1);(B;\alpha^2 + 2);(C;-2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي

- عين بدلالة α إحداثيات G_α و استنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$

التمرين الرابع :(7 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2) + 1, x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

I. 1. أحسب نهاية f عند $+\infty$

1. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $4,6 < \alpha < 4,7$
4. أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

II. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1. أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$
2. حدد اتجاه تغيرات الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)
3. أنشىء (D) و (C_f)

III. 1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$

- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

انتهـــــــــــــــــــى

مع تمنيــاتنا بالنجاح في شهــادة البكــــالوريا

أساتـــذة المـــادة

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1.تمثيل الوسيطي لـ (AB) :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة $A(8;0;8)$ إذن : $(AB):\begin{cases}x=2\lambda+8\\y=3\lambda\\z=2\lambda+8\end{cases};\lambda\in IR$

2.تبيان أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ (AB) و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه لـ (D) و منه : $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه (AB) و (D) غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases}-5+3t=2\lambda+8...(1)\\1+2t=3\lambda....(2)\\-2t=2\lambda+8....(3)\end{cases}$ بعد التبسيط بين المعادلتين (2) و (3) نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا تحقق المعادلة (1) إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي

3. (P) المستوي الذي يوازي (D) و يشمل (AB)

أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) :

يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و على $\overrightarrow{u_{(D)}}$

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0$

ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ(P) :

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج :

ومنه : $2(8)+0(-2)+1(8)+d=0$

$d=-24$

$(P):2x-2y+z-24=0$

ج. تبيان أن المسافة $d\left((P);(D)\right)$ ثابتة مع تحديد الثابت :

لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$

ومنه :

$$d\left((P);(D)\right)=d\left((P);M\right)=\frac{\left|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

ومنه : $d\left((P);(D)\right)=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$

د. التمثيل الوسيطي لـ(Δ) المعرف بتقاطع (P) و (Oxy) :

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-2y+z-24=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$ و بوضع : $y=k$ ينتج :

$\begin{cases}x=y+12\\y=k\\z=0\end{cases}$ أي : $(\Delta):\begin{cases}x=k+12\\y=k\\z=0\end{cases};k\in IR$

هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء $\begin{cases}2x-2y+z-24=0\\z=0\end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم (Δ)

و. تعيين معادلة ديكارتية لـ(S) :

نصف قطر لـ(S) هو $C\omega=6$

لنعين إحداثيات ω : لنفرض $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ حيث (Δ') المستقيم العمودي على (P) في C ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases}x=2k'+10\\y=1-2k'\\z=6+k'\end{cases};k'\in IR$ ومنه : $d\left((P);\omega\right)=6$ بعد التبسيط نجد : $d\left((P);\omega\right)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(14;-3;8)$ أو $\omega(6;5;4)$

بتعويض إحداثيات كل من ω و النقطة O في معادلة (P)

$O(0;0;0):-24<0$

نجد : $\omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0$ اذن

$\omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0$

$\omega(6;5;4)$ و النقطة O في نفس جهة من المستوي (P) **إذن معادلة لـ(S)** هي : $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$

4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو(OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ(OAB) و يشمل النقطة O إذن :

$(OAB):\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases};(t';\lambda')\in IR^2$

استنتاج المعادلة الديكارتية لـ(OAB) :

$\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\\lambda'=\frac{y}{3}\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

$(OAB):x-z=0$:

ب. تبيان أن (S) و (OAB) متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :

لدينا : $6<\sqrt{2}=\frac{|6-4|}{\sqrt{1+0+1}}=d((OAB);\omega)$ إذن :
$(OAB)\cap(S)$ هو دائرة
المستقيم الذي يشمل ω ويعامد (OAB) هو :

$$\begin{cases} x=6+h \\ y=15 \quad ;h\in IR \\ z=4-h \end{cases}$$

ومنه مركز الدائرة هو Ω نقطة تقاطع هذا المستقيم مع (OAB) وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و $\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها r حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2((OAB);\omega)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$$

التمرين الثاني :

1.تعيين العددين الحقيقين a و b :

$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه : $a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3}$ و $b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3}$ بالمطابقة

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=(4i\sqrt{3})^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و $z_2=2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و $z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$$

3.تبيان أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$:

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

4.أ.تحقق أن : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$:

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\frac{2}{3}(2+2i\sqrt{3})+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$:

لدينا :

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافئ $z_B-z_C=i\sqrt{3}(z_A-z_C)$

ومنه : $|z_B-z_C|=\sqrt{3}|z_A-z_C|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

يكافئ : $CB=\sqrt{3}CA$ و $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C(1-\alpha)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

5.أ.تبيان أن (U_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها q و حدها الأول U_0:

لدينا :

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta|$$

$$=|i\sqrt{3}(z_{n+1}-z_n)|=|i\sqrt{3}||z_{n+1}-z_n|=\sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول

$$U_0=|z_1-z_0|=|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا : $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف1

$\sqrt{128-32\sqrt3} = \left(\left(128-32\sqrt3\right)^2\times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times....\times U_n\times U_{n+1} = \left(\left(128-32\sqrt3\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt3\right)^2\times3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt3\right)^{\frac12}\sqrt3^{n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt3\right)^2\times3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

التمرين الثالث :

1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ ومنه :

$5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و 3 و 5 أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$

ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافىء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$

ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times2+1$ ومنه $5-2(2)=1$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي : $5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيمابينها و $6/5(x-3)$ أي $6/(x-3)$ ومنه $x=6k+3$

بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$

ج.استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافىء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي : $5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد : $(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α و β في x نجد : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

د. حل الجملة (S) بطرق غير استنتاجية :

(S) تكافىء $\begin{cases}5x\equiv-5[30]\\6x\equiv-24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv-19[30]$ أي : $x\equiv-19[30]$ ومنه $x\equiv11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث :

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) و $x^2-y^2\le56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le56$ تكافىء $11k^2+16k-51\le0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

4.تعين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}^3$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}^5$ فإن : $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و

$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times5^3=126\alpha+25\beta$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافىء $5a-6b=3$ ومنه :

$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد

$51\alpha+25\beta=202$ و بما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$

التمرين الرابع : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

1.أ.إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$ لان : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

تبيان أن (D) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن (D) م م لـ (C) عند $+\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-x>0$ اذن (C) يقع فوق (D) من اجل كل x من IR

2.أ. إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^x+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^x}\right)$

$=\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln e^x=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$ لأن:

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0;\ \lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

تبيان أن (D') ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+\ln 2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2=0$

إذن (D') م م لـ (C) عند $-\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ(C) بالنسبة (D'):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن (C) يقع فوق (D') من اجل كل x من IR

3.دراسة إتجاه تغير f : f ق إ على IR حيث :

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)}$$

إشارة $f'(x)$: تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^x\left(e^x+2e^{-x}\right)>0$

$e^{2x}-2\ge 0$ معناه : $e^{2x}\ge 2$ معناه $2x\ge\ln 2$ أي $x\ge\frac{\ln 2}{2}$

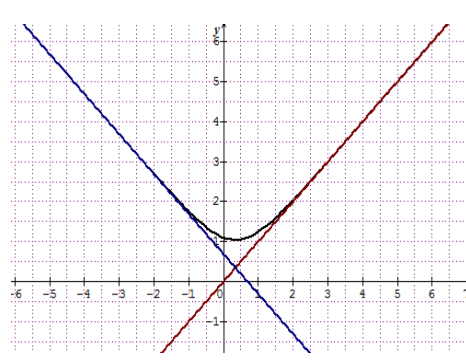
x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

4.الرسم :



5.أ.تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة

من أجل كل عدد حقيقي m : لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافيء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافيء : $\begin{cases} y-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ x-\frac{\ln 2}{2}=0 \end{cases}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};y=\frac{\ln 2}{2}$

ب. المناقشة البيانية:

إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) هو (D)

إذا كان $m=-1$ فإن (Δ_m) هو (D')

(D) و (D') يتقاطعان في نقطة الثابتة A

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن (Δ_m) لايقطع المنحنى (C)

إذا كان $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن (Δ_m) يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة

II .1. تفسير الهندسي للعدد I : I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

2.تبيان من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\ln(1+X)\le X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة h

لدينا h ق.إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدالة h سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه

$\ln(1+X)-X\le 0$ أي $\ln(1+X)\le X$

3.استنتاج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا : $I=\int_2^3\left(f(x)-x\right)dx=\int_2^3\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx$ و بما أن :

$2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR $([2;3])$

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \leq 2e^{-2x}$ ومنه :

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$ أي $I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \geq 0$ و بما أن $2 < 3$ فإن

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \geq 0$ أي $I \geq 0$ ومنه : $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

1ـأ/ تحقق أن : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

لدينا: $z_B - z_D = 1+\frac{a-1}{a}i+\frac{1}{a}i$

$= 1+\frac{a-1+1}{a}i = 1+i$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)=\frac{1}{a}i\left(a-ai\right)=i+1$

ومنه : $z_B-z_D=\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)$

ب/ استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان :

من السؤال ـأـ لدينا : $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\overline{z_D}=\frac{1}{a}i$ و منه :

$\arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{a}i\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ لان $\frac{1}{a}>0$ وبالتالي :

إذن : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و (AC) و (BD) متعامدان

2ـ أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل : $z'=\alpha z+\beta$

لدينا $S(A)=B$ معناه : $z_B=\alpha z_A+\beta ....(1)$

$S(C)=D$ معناه : $z_D=\alpha z_C+\beta ....(2)$ ومنه بطرح (1) من (2) نجد : $z_B-z_D=\alpha\left(z_A-z_C\right)$ ومنه : $\alpha=\frac{z_B-z_D}{z_A-z_C}=\overline{z_D}$

ومنه : $\alpha=\frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D=\alpha z_C+\beta$ ومنه : $\beta=z_D-\alpha z_C$ اي :

$\beta=-\frac{1}{a}i-\frac{1}{a}i(ai)$ ومنه : $\beta=1-\frac{1}{a}i$

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z'=\frac{1}{a}iz+1-\frac{1}{a}i$

ب/ تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S :

نعلم أن : $z_\Omega=\frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega=\frac{1-\frac{1}{a}i}{1-\frac{1}{a}i}=1$ ومنه $z_\Omega=1$

- **تحديد العناصرة المميزة للتشابه S :**

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a}>0$)

ج/ تبيان أن المثلثين OAC و BHD متشابهان :

لدينا $S(A)=B$ و $S(C)=D$

لنحدد لاحقة النقطة O بالتشابه S

$z'=\frac{1}{a}i(0)+1-\frac{1}{a}i=1-\frac{1}{a}i=z_H$ لأن $z_H=1+z_D=1-\frac{1}{a}i$

وهكذا $S(O)=H$

إذن صورة المثلث OAC بالتشابه S هو المثلث BHD ومنه المثلثان OAC و BHD متشابهان

- **ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :**

$A(BHD)=\left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD)=\frac{A(OAC)}{a^2}$

3ـ أ/تبيان أن (U_n) متتالية هندسية :

لدينا : $U_{n+1}=\left|z_{n+1}-z_n\right|=\Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$ فإن : $\Omega M_{n+1}=\frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1}=\frac{1}{a}\Omega M_n=\frac{1}{a}\left|z_n-z_\Omega\right|=\frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{a}U_n$ ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|z_0-z_\Omega\right|=|a-1|$ أي : $U_0=|a-1|$

ب/ تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة :

(U_n) متقاربة يعني : $-1<q\le 1$ أي : $-1<\frac{1}{a}\le 1$ و بما أن $\frac{1}{a}>0$ ينتج : $0<\frac{1}{a}\le 1$ أي $a\ge 1$ و بما أن $a\ne 1$ فإن : $a>1$ أي : $a\in]1;+\infty[$

ج/ حساب المجموع T_n بدلالة n :

نلاحظ أن : $T_n=M_{n+1}\Omega+M_n\Omega+......+M_0\Omega$

$U_n=\left|z_n-z_\Omega\right|=U_n$ ؛ ومنه : $T_n=U_{n+1}+U_n.......+U_0$ ومنه

$T_n=U_0\left(\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\right)$ ومنه : $T_n=|a-1|\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$ ومنه :

$$T_n=a\times\frac{|a-1|}{a-1}\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$$

4ـ لدينا $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ و $\theta\in IR$:

- **تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ) :**

$Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ يكافىء :

$Z=a+ae^{i\theta}$ يكافىء $Z-a=ae^{i\theta}$ و بما أن $\theta\in IR$ يكون لدينا $|Z-a|=|a|=a$ لان $a>0$ أي (Γ) هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة a و نصف قطرها $r=a$

التمرين الثاني :

I.تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha=475\beta+m$ تكافىء $2014\alpha-475\beta=m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

II. لدينا المعادلة $2014x-475y=-19....(1)$:

1ـتعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء $106x-25y=-1...(*)$ و لدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$

2ـحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) :

المعادلة (1) و المعادلة $(*)$ متكافئتان لهما نفس مجوعة الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1...(*)$

بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة $(*)$ فإن :

$(E)...106(4)-25(17)=-1$

من $(*)$ و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3ـتبيان أن x و y أوليان فيمابينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y أي $\frac{d/x}{d/y}$ ومنه $\frac{d/106x}{d/25y}$ إذن : $d/106x-25y$ أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$

إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه x و y أوليان فيمابينهما

4ـ تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17 :

أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv4[25]\\n\equiv17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ ومنه

: $106\beta+17=25\alpha+4$ ومنه $106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال-2-

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن

$n=106\beta+17$ بالتعويض نجد

ومنه : $n=106(25p+52)+17$

$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$

5ـتعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

و لدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv0[10]$ أي :

$131k+21\equiv0[10]$ أي : $k+1\equiv0[10]$ أي $k\equiv-1[10]$ أي

$k\equiv9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :

$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث :

1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $B\hat{A}C$:

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$ ومنه :

$COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$ ومنه

$B\hat{A}C=77^0$

2.استنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

بما أن : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=77^0$ فإن A ، B و C ليست في استقامية

استنتاج أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$

لدينا : $B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$

$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

3.أ. كتابة معادلة الديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري لـ $[AB]$:

(P) المستوي المحوري لـ $[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$

ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي المستوي (P') معادلته $4y+2z-7=0$:

$AM=CM$ معناه :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$

و بعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)

ج. تبيان أن (P) و (P') متقاطعان :لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ ومنه $\frac{0}{6}\neq\frac{4}{4}\neq\frac{2}{-4}$ إذن (P) و (P')

متقاطعان وفق مستقيم

تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P')

لدينا : $\begin{cases} 6x+4y-4z-1=0 \\ 4y+2z-7=0 \end{cases}$ ومنه :

$\begin{cases} 6x-2z+7-4z-1=0 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 6x-6z=-6 \\ 4y=-2z+7 \end{cases}$ و منه

$\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4} \\ z=z \end{cases}$ إذن :

$(\Delta):\begin{cases} x=t-1 \\ y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR \\ z=t \end{cases}$ إذن : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$

4.أ/ تبيان أن (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ ، $\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-1;2)$ ومنه : $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن

$\vec{u}_{(\Delta)}//\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن (Δ) و (ABC) متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي ω

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

ب/ استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لتبيان أن ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

5. النقطة G_α مرجح الجملة $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ حيث : α عدد حقيقي

ـ تعين احداثيات النقطة G_α :

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

ـ استنتاج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في IR :

لدينا : $\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2 \quad ;\alpha^2\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2 \end{cases}$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

$\begin{cases} x_{G_\alpha}=3\lambda+4 \\ y_{G_\alpha}=4-2\lambda \quad ;\lambda\in IR \\ z_{G_\alpha}=-3-4\lambda \end{cases}$ ومنه تمثل النقط G_α مستقيم

التمرين الرابع :

I.لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1, x>0$ و $f(0)=1$

1.حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1=-\infty$$

2.دراسة قابلية إشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لانها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية إشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1-1}{x}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{2}x(3-\ln x^2)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{3}{2}x-x\ln x=0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

3.دراسة إتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتق:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$$f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)=x(3-2\ln x)-x$$

ومنه : $f'(x)=2x(1-\ln x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $2x>0$

$f'(x)\geq0$ يـكافـىء $(1-\ln x)\geq0$ يـكافـىء $\ln x\leq1$ أي $x\leq e$ أي $x\in]0;e]$ إذن :

$x\in]0;e]$ يـكافـىء $f'(x)\geq0$ و منه الدالة f متزايدة تماما ونستنتج $x\in[e;+\infty[$ يـكافـىء $f'(x)\leq0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$

تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $\alpha\geq0$ و $f(\alpha)=0$: من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ و مستمرة على هذا المجال و لدينا :

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا وحيدا α في المجال

$[e;+\infty[$ (نلاحظ على المجال $[0;e]$ أن $f(x)\geq 1$) وهكذا

يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$:

لدينا : $f(4,6)=$ و $f(4,7)=$ أي : $f(4,7)\times f(4,6)<0$

5ـكتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(D): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $(D): y=2x+\frac{1}{2}$

II.لدينا : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$:

1.حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g'(x)=f'(x)-2$ أي $g'(x)=2x(1-\ln x)-2$

الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g''(x)=2(1-\ln x)+2x\left(\frac{-1}{x}\right)$ أي $g''(x)=-2\ln x$

- **دراسة إتجاه تغير g' :**

$g''(x)\geq 0$ يكافىء $-2\ln x\geq 0$ يكافىء

$\ln x\leq 0$ يكافىء $0<x\leq 1$ إذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x)<0$ يكافىء $-2\ln x<0$ يكافىء

$\ln x>0$ يكافىء $x<1$ إذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

- **جدول تغيرات g' :**

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	-2 ↗	0	↘ $-\infty$

- **إشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$:**

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)\leq 0$

2ـتحديد إتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال 1ـ $g'(x)\leq 0$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

$g(1)=0$

من جدول تغيرات الدالة g نجد : $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in]0;1]$

$g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[1;+\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : يعود إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-2x-\frac{1}{2}$ أي إشارة $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

3ـإنشاء (C_f) و (D) :



III.1.حساب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة:

لدينا : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$ ، نضع : $u'(x)=x^2$ ، $v(x)=\ln x$ ومنه : $u(x)=\frac{x^3}{3}$ ، $v'(x)=\frac{1}{x}$

إذن : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx$

ومنه:

أي $I_n=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

بعد التبسيط نجد : $I_n=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{n^3}\right)$

$I_n=\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)-\frac{1}{9}$

2ـاستنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$:

بما أن $0<\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ أي $0<x<1$ فإن $f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$

حسب السؤال 2ـ من الجزء II- أي من أجل $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ فإن :

$f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$ و بالتالي

و لدينا : $A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)dx$

ومنه :

$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x)+1-2x-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x$$

ومنه

$$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$$

بعد التبسيط نجد : $A(n)=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-I_n$

وبعد التبسيط

$$A(n)=-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-I_n$$

$$=-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)+\frac{1}{9}$$

نجد:

$$A(n)=\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)+\frac{1}{9}\right)\times 4cm^2$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}A(n)$:

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}=0$ ومنه نجد $\lim_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}\times 4=\frac{4}{9}$

ملاحظة هامة: تضرب قيمة المساحة بمربع وحدة الطول أي بالعدد $2\times 2=4$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 .

2) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

3) عين قيم n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على 5 و 7 هو 4 .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $4U_{n+1}-2U_n=9$

ولتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=2U_n-\alpha$ مع α عدد حقيقي .

1) عين α حتى تكون (V_n) متتالية هندسية معينا أساسها .

2) نفرض $\alpha=9$:

أ- احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ثم V_0 ، V_1 ، V_2 ، V_3 .

ب- احسب V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n .

ج- احسب المجموع $S_n=V_0+V_1+...+V_n$ بدلالة n ثم المجموع $S'_n=U_0+U_1+...+U_n$ بدلالة n .

د- احسب الجداء : $P=V_0\times V_1\times...\times V_n$ بدلالة n .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

f دالة عدية معرفة على المجال $]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+2-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2- احسب نهايات الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$. ماذا تستنتج هندسيا .

4- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+2$.

5- أنشئ (Δ) و (C_f) .

6- عين الدالة الأصلية g للدالة f والتي تنعدم عند 3 .

7- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 3$ و $x = 4$ و $y = x + 2$.

8- لتكن h دالة معرفة بالعبارة : $h(x) = |x| + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{|x| - 2}}$

- بين كيف يمكن إنشاء $\left(C_h\right)$ انطلاقا من $\left(C_f\right)$ ثم أنشئه في نفس المعلم السابق .

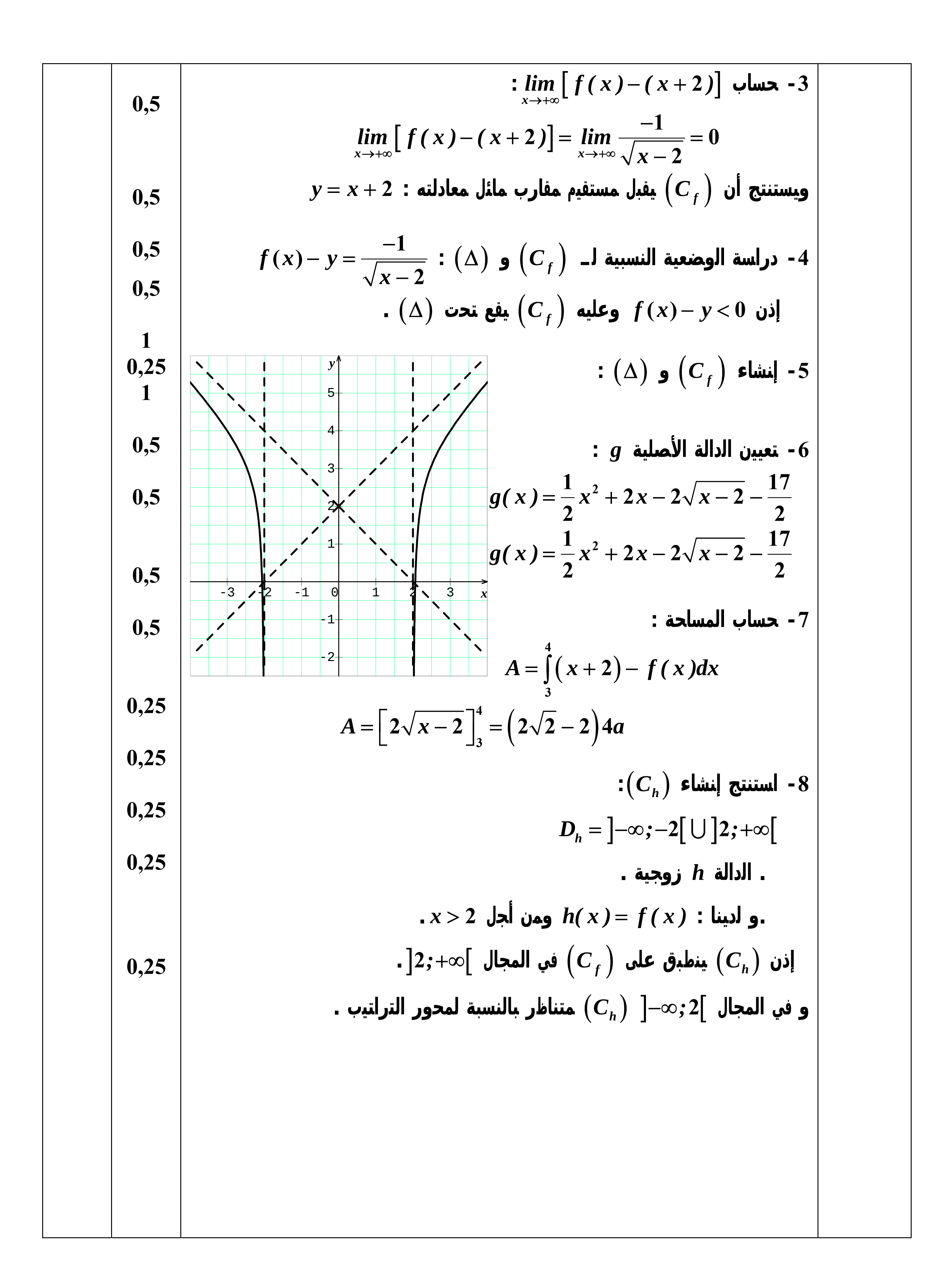
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1- دراسة بواقي قسمة 2^n على 5 :		5
	$2^0 \equiv 1[5]$ ، $2^1 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$	1,25	
	$2^{4k} \equiv 1[5]$ ، $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ ، $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ ، $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ مع $k \in \mathbb{N}$.	1	
	2- دراسة بواقي قسمة 2^n على 7 :		
	$2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$	1	
	$2^{3\ell} \equiv 1[7]$ ، $2^{3\ell+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3\ell+2} \equiv 4[5]$ مع $\ell \in \mathbb{N}$.	0,75	
	3- تعيين n بحيث باقي قسمة 2^n على 5 و على 7 هو n :		
	$n = 4k + 2$ و $n = 3\ell + 2$	0,25	
	$4k + 2 = 3\ell + 2$ أي $4k = 3\ell$	0,25	
	$3/4k$ و $3 \cap 4 = 1$ ومنه $3/k$	0,25	
	إذن : $k = 3\alpha$		
	إذن : $n = 12\alpha + 2$ ، $\alpha \in \mathbb{N}$	0,25	

5		1) تعيين α :	حل التمرين 2
	0,25	$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left[2U_n-\alpha+9-\alpha\right]$	
		$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left[V_n+9-\alpha\right]$	
	0,25 0,25	إذن : $9-\alpha=0$ ومنه : $\alpha=9$ و $q=\frac{1}{2}$	
		2) أ) الحساب :	
	0,75	$U_1=\frac{5}{2}$ ، $U_2=\frac{7}{2}$ ، $U_3=4$	
	1	$V_0=-2$ ، $V_1=-4$ ، $V_2=-2$ ، $V_3=-1$	
	0,25	ب) حساب V_n بدلالة n : $V_n=V_0\times q^n$	
	0,25	$V_n=-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$	
	0,25	- حساب U_n بدلالة n : $U_n=\frac{1}{2}\left(V_n+9\right)$	
	0,25	$U_n=\frac{1}{2}\left[-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+9\right]$	
	0,25	ج) حساب S_n: $S_n=V_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	
	0,25	$S_n=-8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$	
	0,25	- حساب S'_n: $S'_n=\frac{1}{2}V_0+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}V_1+\frac{9}{2}+...+\frac{1}{2}V_n+\frac{9}{2}$	
		$S'_n=\frac{1}{2}S_n+\frac{9}{2}(n+1)$	
	0,25	$S'_n=-8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+\frac{9}{2}(n+1)$	
		د) حساب الجداء :	
	0,25	$p=V_0\times\left(V_0\times q\right)\times\left(V_0\times q^2\right)\times...\times\left(V_0\times q^n\right)$	
	0,25	$p=V_0^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(-8\right)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$	

10	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5	1- اتجاه تغير الدالة f : $$f'(x)=1+\frac{1}{2(x-2)\sqrt{x-2}}$$ إذن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]2;+\infty[$ 2- حساب النهايات : $$\lim_{x\geq 2} f(x)=\lim_{x\geq 2}\left(x+2-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=-\infty$$ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=+\infty$$ - جدول التغيرات : x: 2 … $+\infty$ $f'(x)$: + $f(x)$: $-\infty$ ↗ $+\infty$	حل التمرين 3

3- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$:	0,5
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x-2}}=0$$	
ويستنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته : $y=x+2$	0,5
4- دراسة الوضعية النسبية لـ $\left(C_f\right)$ و (Δ) : $f(x)-y=\dfrac{-1}{\sqrt{x-2}}$	0,5
إذن $f(x)-y<0$ وعليه $\left(C_f\right)$ يقع تحت (Δ) .	0,5
	1
5- إنشاء $\left(C_f\right)$ و (Δ) :	0,25 1
6- تعيين الدالة الأصلية g :	0,5
$g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2\sqrt{x-2}-\frac{17}{2}$	0,5
$g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2\sqrt{x-2}-\frac{17}{2}$	
	0,5
7- حساب المساحة :	0,5
$A=\int_3^4 (x+2)-f(x)dx$	
$A=\left[2\sqrt{x-2}\right]_3^4=\left(2\sqrt{2}-2\right)4a$	0,25
8- استنتج إنشاء $\left(C_h\right)$:	0,25
$D_h=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$	0,25
. الدالة h زوجية .	0,25
.و لدينا : $h(x)=f(x)$ ومن أجل $x>2$.	
إذن $\left(C_h\right)$ ينطبق على $\left(C_f\right)$ في المجال $]2;+\infty[$.	0,25
و في المجال $]-\infty;2[$ $\left(C_h\right)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .	



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2010		

المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) حلّل العدد 1998 إلى جداء عوامل أولية ثم عين مجموعة قواسمه .

2) a و b عددان طبيعيان . δ قاسمهما المشترك الأكبر و μ مضاعفهما المشترك الأصغر ويحققان الجملة :

$$(I)\ \ldots \begin{cases} \delta + \mu = 1998 \\ 27 < \delta < 54 \end{cases}$$

أ) بين أن δ يقسم 1998 ثم عين δ .

ب) عين الثنائيات $(a;b)$ من $(\mathbb{N}^*)^2$ والتي من أجلها تكون الجملة (I) محققة .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^3 - 3i\sqrt{3}Z^2 - 9Z - 21i\sqrt{3} = 0 \quad \ldots \ (I)$

1) بين أن $Z_2 = -i\sqrt{3}$ حل للمعادلة (I) .

2) عين العددان المركبان a وb بحيث (I)تكافئ $\left(Z^2 + aZ + b\right)\left(Z + i\sqrt{3}\right) = 0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I)

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها

$$Z_B = 3 + 2i\sqrt{3} \quad ، \quad Z_C = -3 + 2i\sqrt{3} \quad ، \quad Z_D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

أ) احسب طويلة وعمدة العدد المركب Z حيث : $Z = \dfrac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D}$. ما هو التفسير الهندسي .

ب) ما هي طبيعة المثلث BCD ؟

التمرين الثالث : (10 نقاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

1) تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ و $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

2) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3) عين معادلتي المستقيمين المقاربين (Δ_1) و (Δ_2) .

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ_1) و (Δ_2) .

5) بين أن f دالة فردية .

6) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول التغيرات .

7) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

8) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (T) و (C_f) .

9) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = -1$ ، $x = 0$ ، $y = x + 1$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عنـــاصــــر الإجـــابـــة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1) تحليل 1998 : $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$	0,5	5
	مجموعة قواسم العدد 1998 : قواسم 1998 من الشكل : $d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 37^\delta$ حيث : $0 \le \alpha \le 1$ و $0 \le \beta \le 3$ و $0 \le \delta \le 1$	1,5	

$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$\delta = 0$	$d = 1$
		$\delta = 1$	$d = 37$
	$\beta = 1$	$\delta = 0$	$d = 3$
		$\delta = 1$	$d = 11$
	$\beta = 2$	$\delta = 0$	$d = 9$
		$\delta = 1$	$d = 333$
	$\beta = 3$	$\delta = 0$	$d = 27$
		$\delta = 1$	$d = 99$
$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\delta = 0$	$d = 2$
		$\delta = 1$	$d = 74$
	$\beta = 1$	$\delta = 0$	$d = 6$
		$\delta = 1$	$d = 22$
	$\beta = 2$	$\delta = 0$	$d = 18$
		$\delta = 1$	$d = 666$
	$\beta = 3$	$\delta = 0$	$d = 54$
		$\delta = 1$	$d = 1998$

محاور الموضوع	عنـــاصــــر الإجـــابـــة	مجزئة	كاملة
	2) أ- تبيان أن δ يقسم 1998 :		
	لدينا : $\begin{cases} a = \delta a' \\ b = \delta b' \\ a' \wedge b' = \wedge \end{cases}$ ولدينا : $\delta \times \mu = a \times b$	0,5	
	وعليه : $\mu = \delta a'b'$ ومنه : $\delta\left(1 + a'b'\right) = 1998$	0,5	
	إذن : $\delta / 1998$	0,25	

		* تعيين δ :	
	0,25	بما أن : $27 < \delta < 54$ فإن : $\delta = 37$	
		ب) تعيين $(a;b)$:	
	0,5	لدينا : $\begin{cases} 37(1+a'b') = 1998 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} a'b' = 53 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$	
	0,5	إذن : $(a';b') = (1;53)$ أو $(a';b') = (53;1)$	
	0,5	وعليه : $(a;b) = (37;1961)$ أو : $(a;b) = (1961;37)$	
5	0,5	1- تبيان Z_0 حل للمعادلة (I):	حل التمرين 2
		$\left(-i\sqrt{3}\right)^3 - 3i\sqrt{3}\left(-i\sqrt{3}\right)^2 - 9\left(-i\sqrt{3}\right) - 21i\sqrt{3} = 0$	
		$0 = 0$ محققة .	
		2- تعيين a و b :	
		$(Z^2 + aZ + b)(Z + i\sqrt{3}) = 0$	
	0,5	أي $Z^2 + (i\sqrt{3} + a)Z^2 + (a\sqrt{3} + b)Z + bi\sqrt{3} = 0$	
	0,5	ومنه $a = -4i\sqrt{3}$ و $b = -21$	
	0,25	اذن (I) تكافئ : $\left(Z^2 - 4i\sqrt{3}Z - 21\right)\left(Z + i\sqrt{3}\right) = 0$	
		حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) :	
	0,25	(I) تكافئ : $Z = -i\sqrt{3}$	
	0,25	أو $Z^2 - 4i\sqrt{3}Z - 21 = 0$	
	0,25	$\Delta = 36$	
	0,5	للمعادلة حلين : $Z_1 = 3 + 2i\sqrt{3}$ ، $Z_2 = -3 + 2i\sqrt{3}$	
		3- حساب طويلة وعمدة Z :	
	0,5	$Z = \dfrac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D} = -\dfrac{1}{3}i\sqrt{3}$	
	0,5	$\lvert Z \rvert = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ، $arg\left(Z\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$	
		$k \in \mathbb{Z}$	
		التفسير الهندسي :	
	0,5	$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$	
	0,5	طبيعة المثلث BCD :	
		المثلث BCD قائم في D	

10	0,5	1- التحقق من أن : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$	حل التمرين 3
		$f(x)=x-\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	
	0,5	* التحقق من أن : $f(x)=x+1+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$	
		$f(x)=x-\dfrac{-e^x-1+2e^x}{e^x+1}=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	
		2- حساب النهايات :	
	0,5	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-\infty$	
	0,5	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{2}{e^x+1}=+\infty$	
		3- تعيين معادلتي (Δ_1) و (Δ_2) :	
	0,25	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2e^x}{e^x+1}=0$	
	0,25	إذن معادلة المستقيم المقارب (Δ_1) هي : $y=x+1$	
	0,25	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+1}=0$	
	0,25	إذن معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ_2) هي : $y=x-1$	
		4- دراسة وضعية (C_f) و (Δ_1) :	
	0,25	$f(x)-y=\dfrac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $f(x)-y<0$	
	0,25	إذن (C_f) يقع تحت (Δ_1).	
	0,25	* دراسة وضعية (C_f) و (Δ_2) :	
	0,25	$f(x)-y=\dfrac{2}{e^x+1}$ ، $f(x)-y>0$	
		إذن (C_f) يقع فوق (Δ_2).	
		5- تبيان أن f فردية :	
	0,5	$f(-x)=-x-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-f(x)$ ، $D_f=\mathbb{R}$	
		إذن f فردية .	
		6- دراسة اتجاه تغير f :	
	0,5	$f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$	
	0,5	إذن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.	

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0,5

7- معادلة المماس :

0,25 $$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

0,25 $$y = \frac{1}{2}x$$

8- إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) و (T) و (C_f) :

0,25 (Δ_1)

0,25 (Δ_2)

0,25 (T)

1 (C_f)

9- حساب المساحة :

0,75 $$A = \int_{-1}^{0}\left[(x+1) - f(x)\right]dx = 2\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

1 $$A = 2\left[ln\left(e^x+1\right)\right]_{-1}^{0} = 2\,ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)ua$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2010		
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا

التمرين الأول : (4,5 نقاط)

نرمي 10 مرات حجر نرد مكعب غير مزور مرقم من 1 إلى 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

1) ما هو القانون الذي يتبعه X معينا وسائطه ؟

2) عين الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري للمتغير X .

3) ما هو احتمال الحصول 8 مرات على مضاعف 3 ؟

4) ما هو احتمال الحصول 9 مرات على الأكثر على مضاعف 3 ؟

التمرين الثاني : (6,5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\right)$. Z عدد مركب و Z' عدد مركب معرف كما يلي :

$$Z' = \left|Z\right|^2 + 4\,i\,Z - 5 - 4i$$

1) عين $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث يكون Z' حقيقيا .

2) عين $\left(F\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث يكون Z' تخيلي صرف .

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z' = 1$. (Z المجهول)

نرمز بـ Z_1 إلى الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و Z_2 الحل الآخر .

4) نعتبر النقطتين A و B صورتي $1-i$ و $1+5i$ على الترتيب و C نظيرة A بالنسبة إلى O .

عين لاحقة C ثم لاحقة مركز ثقل المثلث ABC .

5) عين مركز التشابه الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ويحول B إلى C .

التمرين الثالث : (9 نقاط)

I- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f\left(x\right) = -x + e^{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f مستنتجا إشارتها .

II- لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $g\left(x\right) = 1 + ln\left(e^{x-1} - x\right)$

و $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\right)$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب نهايات الدالة g عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ وعند 1 .

3) شكّل جدول تغيرات الدالة g .

4) احسب $\lim_{x \to +\infty} [g(x) - x]$ ، ماذا تستنتج ؟

5) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,75 < \alpha < 1,76$.

6) ارسم (C_g) .

III - ليكن n عدد طبيعي .

1) احسب العبارة $I_n = \int_n^{n+1} [x + f(x)] \, dx$

2) بين أن (I_n) متتالية هندسية .

3) احسب المجموع $S = I_0 + I_1 + ... + I_{n-1}$ بدلالة n .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد

تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010

المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1- القانون الذي يتبعه X :		4,5
	بهذه التجربة العشوائية تتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين 10 ، $\frac{1}{3}$.	1	
	2- الأمل الرياضياتي :		
	$E(x)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$	0,5	
	التباين : $V(x)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$	0,5	
	الانحراف المعياري : $\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\frac{\sqrt{10}}{3}$	0,5	
	3- احتمال الحصول 8 مرات على مضاعف 3 :		
	$P(X=8)=C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{20}{3^8}=\frac{20}{651}$	1	
	4- احتمال الحصول 9 مرات على الأكثر على مضاعف 3 :		
	$P(X\leq 9)=1-P(X>9)=1-P(X=10)$ $=1-C_{10}^{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$	1	
حل التمرين 2	1- تعيين (E) :		6,5
	$Z'=x^2+y^2-4y-5-4i(x-1)$ حيث Z' حقيقي يكافئ : $x-1=0$	1	
	إذن (E) هي مستقيم معادلته : $x=1$	0,25	
	2- تعيين (F) :		
	Z' تخيلي صرف يكافئ : $x^2+y^2-4y-5=0$	0,5	
	وعليه : $x^2+(y-2)^2=9$	0,25	
	إذن (F) هي دائرة مركزها $A(0;2)$ ونصف قطرها $r=3$	0,5	
	3- حل المعادلة $Z'=1$:		
	$\begin{cases} x^2+y^2-4y-5=1 \\ x-1=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=1 \\ y^2-4y-5=0 \end{cases}$	0,75	

0,5 ومنه : $(x;y)=(1;-1)$ أو $(x;y)=(1;5)$

0,25 أي : $Z_1=1-i$ و $Z_2=1+5i$

0,5 4- تعيين لاحقة C : $Z_C=-Z_A=-Z_1=-1+i$

* تعيين لاحقة G مركز ثقل المثاث ABC :

0,5 $$Z_G=\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}=\frac{1+5i}{3}$$

5- تعيين مركز التشابه :

0,25 عبارة التشابه : $Z'=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)Z+\gamma$

0,25 إذن : $Z'=(-1+i)Z+\gamma$

0,25 وبما أن C هي صورة B فإن : $Z_C=(-1+i)Z_B+\gamma$

0,25 وبالتالي : $\gamma=5+5i$ إذن : $Z'=(-1+i)Z+5+5i$

0,5 وبما أن مركز التشابه نقطة صامدة فإن : $Z'=Z$

وعليه : $Z=1+3i$ أي $w(1;3)$ هي مركز التشابه .

حل التمرين 3 — 9

I) دراسة تغيرات f :

0,25 $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+e^{x-1}\right)=+\infty$$

0,25 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left[\frac{-x}{x-1}+\frac{e^{x-1}}{x-1}\right]=+\infty$$

0,5 $$f'(x)=-1+e^{x-1}$$

f' متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;1]$

0,5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

جدول التغيرات :

0,5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

إشارة $f(x)$:

0,5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

.

II) 1- دراسة اتجاه تغير g :

0,5 $$g'(x)=\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}-x}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

0,5 ومنه $g'(x)$ لها نفس إشارة $f'(x)$ لأن $f(x)>0$.

2- النهايات:

0,25 $$\lim_{x\to+\alpha} g(x)=\lim_{x\to+\alpha}\left[1+\lim\left(e^{x-1}-x\right)\right]=+\infty$$

0,25 $$\lim_{x\to-\alpha} g(x)=\lim_{x\to-\alpha}\left[1+\lim\left(e^{x-1}-x\right)\right]=+\infty$$

0,25 $$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\left[1+\lim\left(e^{x-1}-x\right)\right]=-\infty$$

0,5

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,5 لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=0$

0,25 نستنتج أن $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $(+\infty)$

5)- تبيان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا:

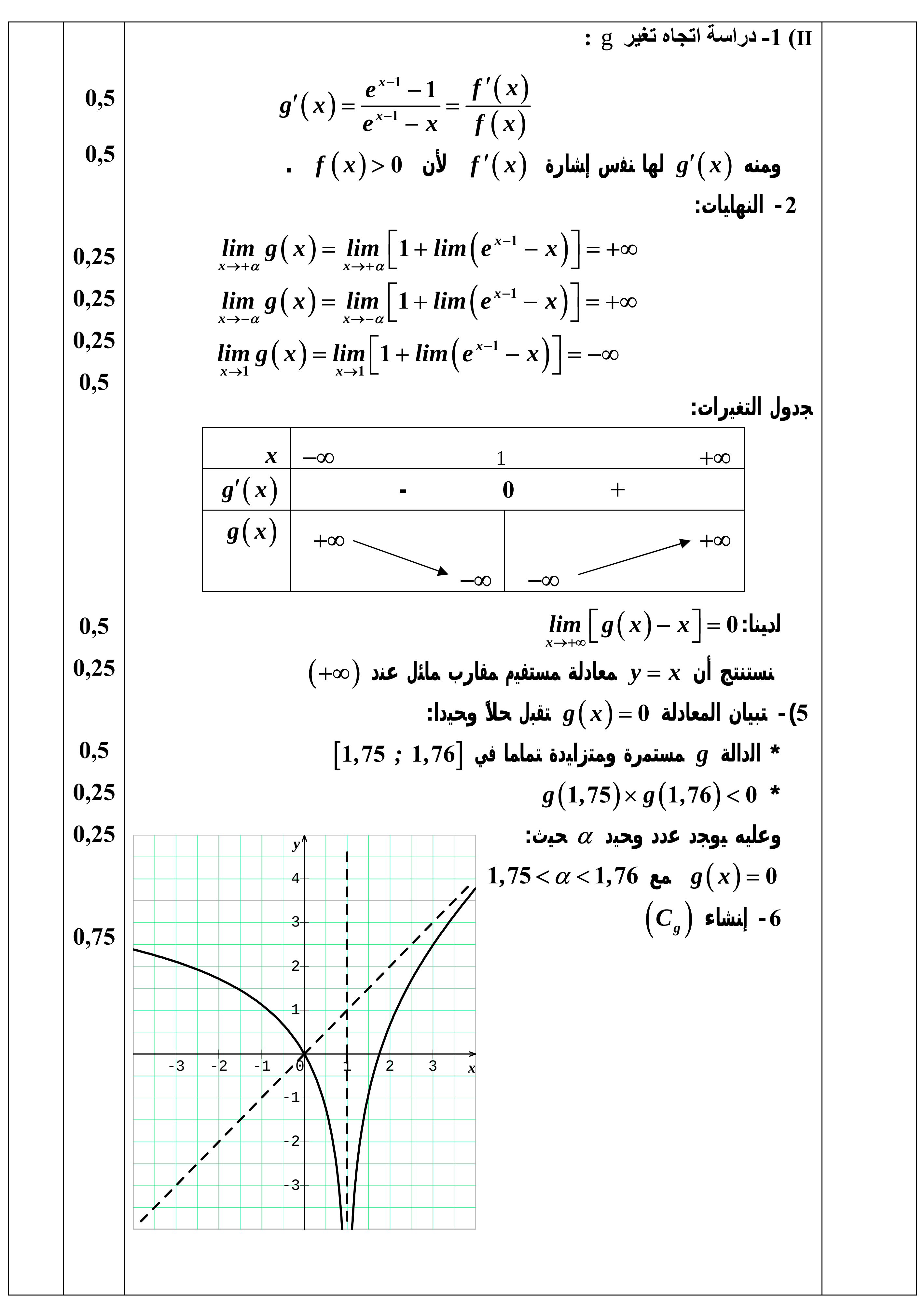
0,5 * الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما في $[1,75\ ;\ 1,76]$

0,25 * $g(1,75)\times g(1,76)<0$

0,25 وعليه يوجد عدد وحيد α حيث:

$g(x)=0$ مع $1,75<\alpha<1,76$

0,75 6- إنشاء (C_g)



	0,5 0,5 0,25 0,25 0,25	(III 1- حساب I_n : $$I_n = \int_n^{n+1} e^{x-1}dx = e^n - e^{n-1}$$ 2- تبيان أن $\left(I_n\right)$ متتالية هندسية: لدينا : $I_{n+1} = e.I_n$ إذن $\left(I_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ 3- حساب S : لدينا : $S = I_0.\frac{q^n - 1}{q - 1}$ و منه : $S = \left(1 - \frac{1}{e}\right).\frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{1}{e}.\left(e^n - 1\right)$		

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا (Δ) الذي يشمل النقطة $A(4 ; -2 ; 1)$ ويكون $\vec{u}(-1 ; 1 ; 3)$ شعاع توجيه له .

2) عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يعامد (Δ) ويشمل النقطة $B(2 ; 1 ; -3)$.

3) عين نقطة تقاطع (Δ) و (P) ولتكن C .

4) ما طبيعة المثلث ABC ؟

التمرين الثاني : (5 نقاط)

1) انشر العبارة : $(2-4i)^2$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(Z+16+12i)(Z^2+4Z+16+16i)=0$.

3) نعتبر الأعداد المركبة : Z_1 ، Z_2 ، Z_3 حيث : $Z_1=-4i$ ؛ $Z_2=-4+4i$ ؛ $Z_3=-16-12i$

والتي صورها A ، B ، C على الترتيب .

أ) عين التشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C .

ب) عين الصورة D للنقطة C بالتشابه S .

ج) أثبت أن المثلث ABC قائم .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2e-x}{x}-\ln x$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- احسب $f(e)$ واستنتج إشارة $f(x)$.

II) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x)=(2e-|x|)\ln|x|$

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$

1- برهن أن g دالة زوجية .

2- تحقّق أنه من أجل $x>0$ فإن : $g'(x)=f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

4- احسب نهايات الدالة g ثم شكل جدول التغيرات .

5- عين نقط تقاطع $\left(C_g\right)$ مع محور الفواصل .

6- احسب $g\left(e^2\right)$ ثم أنشئ $\left(C_g\right)$.

7- نعتبر الدالة h المعرفة بالعبارة : $h\left(x\right)=\left(2e - x\right)\left|ln\, x\right|$.

أ) اكتب $h\left(x\right)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب) بين كيف يمكن إنشاء $\left(C_h\right)$ مما سبق .

8- عين مشتق الدالة φ حيث : $\varphi(x)=\left(\frac{-x^2}{2}+2ex\right)ln\, x+\frac{1}{4}x^2-2ex$ من أجل $x>0$.

9- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_g\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$ و $x=e$ و $y=0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1- معادلة (Δ):		5
	من أجل كل نقطة $M(x;y;2)$ من المستقيم (Δ): $\overrightarrow{AM}=x.\vec{u}$	0,25	
	وعليه: $\begin{cases} x=-\lambda+4 \\ y=\lambda-2 \\ z=3\lambda+1 \end{cases}$ حيث: $\lambda\in\mathbb{R}$	1	
	2- معادلة (P):		
	معادلة (P) من الشكل: $-x+y+32+c=0$	0,75	
	وبما أن $B\in(P)$ فإن معادلة (P): $-x+y+32+10=0$	0,5	
	3- تعيين نقطة تقاطع (P) و (Δ) :		
	نحل المعادلة: $(\lambda-4)+(\lambda-2)+9\lambda+3+10=0$	0,5	
	ومنه: $\lambda=\frac{-7}{11}$ إذن: $C\left(\frac{51}{11};\frac{-29}{11};\frac{-10}{11}\right)$	1	
	4- طبيعة المثلث ABC :		
	لدينا (Δ) عمودي على (P) ومنه: $(AC)\perp(BC)$	0,5	
	وعليه: المثلث ABC قائم في C .	0,5	

5	0,25	1- النشر: $(2-4i)^2=-12-16i$	حل التمرين 2
		2- حل المعادلة:	
	0,25	المعادلة تكافئ: $z=-16-12i$	
	0,25	أو $z^2+4z+16+16i=0$	
	0,5	$\Delta'=-12-16i$ ومنه: $\Delta'=(2-4i)^2$	
	0,5	للمعادلة حلين: $z_1=-4i$ ، $z_2=-4+4i$	
		3- أ) تعيين التشابه S :	
	0,25	عبارة S : $z'=az+b$	
	0,5	لدينا: $\begin{cases} z_1=az_1+b \\ z_3=az_2+b \end{cases}$ أي: $\begin{cases} -4i=a(-4i)=b \\ 16-12i=a(-4+4i)+b \end{cases}$	
	0,75	وعليه: $a=2i$ و $b=-8-4i$ إذن : $Z'=2iZ-8$	
	0,5	نسبة التشابه 2 ، زواية التشابه $\frac{\pi}{2}$	
		ب- تعيين الصورة D للنقطة C:	
	0,5	$Z_D=2iZ_3-8-4i=16-36i$	
		ج- إثبات أن المثلث ABC قائم:	
		بما أن C هي صورة B بالتشابه الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$	
	0,75	فإن: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ وعليه المثلث ABC قائم في A .	

حل التمرين 3			
	I- 1) دراسة تغيرات f : $$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{2e-x}{x} - \ln x\right) = +\infty$$ $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2e-x}{x} - \ln x\right) = -\infty$$ $$f'(x) = \frac{-2e}{x^2} - \frac{1}{x}$$ $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$	0,25 0,25 0,5 0,25	10

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

0,25

2- حساب $f(e)$: لدينا $f(e)=0$ — 0,25

استنتاج إشارة $f(x)$:

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

0,25

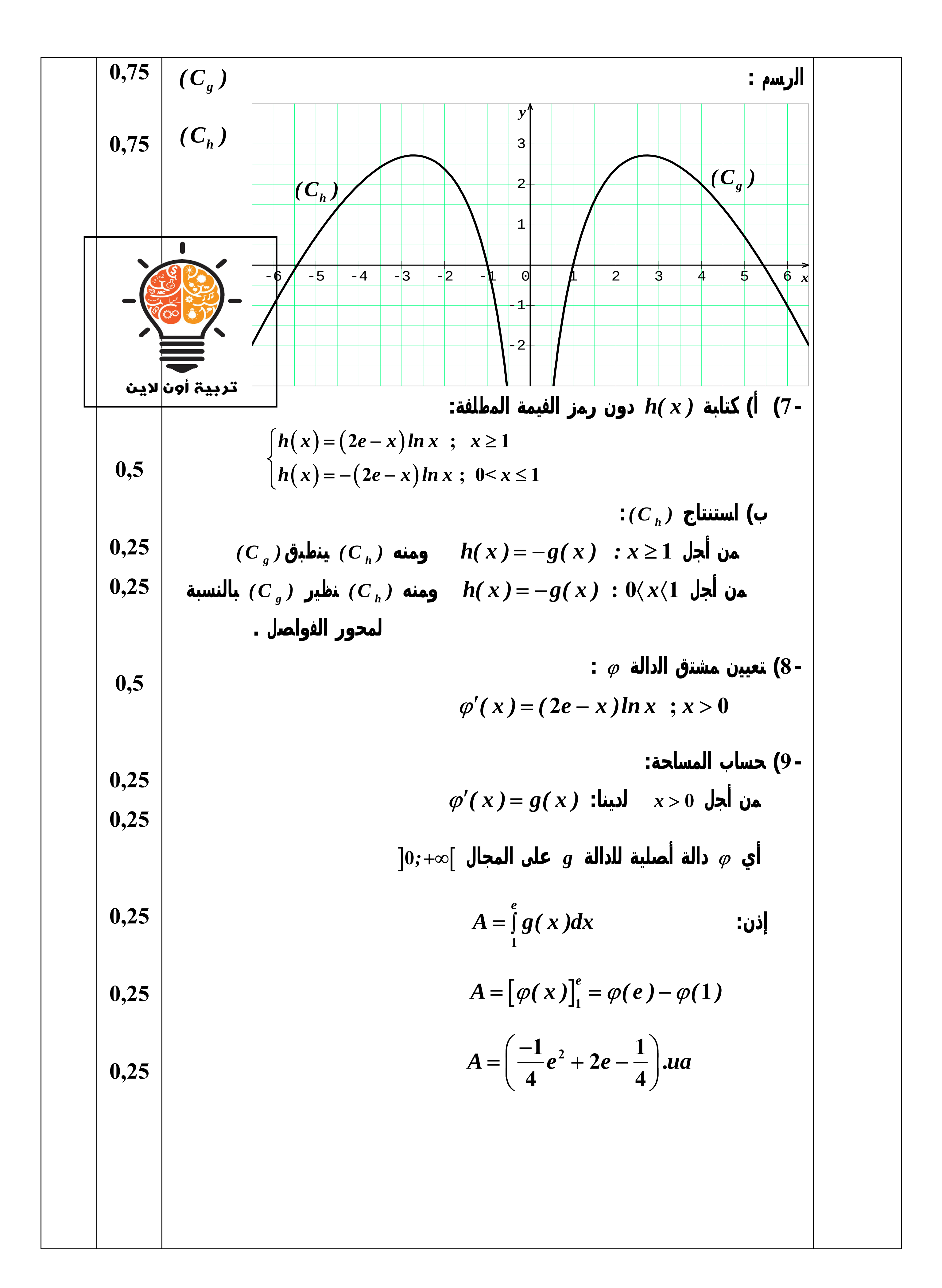
II- 1) برهان أن g زوجية: مجموعة تعريف g هي $\mathbb{R}^*$

$$g(-x) = \left(2e - \left|-x\right|\right)\ln(-x) = g(x)$$

إذن g زوجية. — 0,25

	0,25	2-) من أجل $x>0$: $g(x)=(2e-x)\ln x$ وعليه: $g'(x)=f(x)$	
	0,25 0,25 0,25	3-) دراسة اتجاه تغيرات الدالة g : من أجل $x>0$: $g'(x)=f(x)$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]e;+\infty[$ وبما أن g زوجية فإن g متناقصة تماما على $]-e;0[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;-e[$	
	0,25 0,25	4- حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x)=-\infty$	
	0,5	جدول التغيرات: (see table below)	
	0,25	$g(-e)=e$, $g(e)=e$	
	0,5 0,25 0,25	5-) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع (xx'): $g'(x)=0$ ومنه: $2e-\lvert x\rvert=0$ أو $\ln\lvert x\rvert=0$ إذن: $x=2e$ أو $x=-2e$ أو $x=-1$ أو $x=1$ نقط التقاطع هما: $A(2e;0)$ ، $B(-2e;0)$ ، $C(1;0)$ ، $D(-1;0)$	
	0,25	6-) حساب $g(e^2)$: $g(e^2)=4e-2e^2\approx-3,78$	

x	$-\infty$	$-e$		0		e		$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	‖	+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-e)$	↘ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$f(e)$	↘ $-\infty$	



الرسم :	
(C_g)	0,75
(C_h)	0,75

7- أ) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:	
$$\begin{cases} h(x)=(2e-x)\ln x \;\; ; \;\; x\geq 1 \\ h(x)=-(2e-x)\ln x \; ; \; 0<x\leq 1 \end{cases}$$	0,5
ب) استنتاج (C_h):	
من أجل $x\geq 1$: $h(x)=-g(x)$ ومنه (C_h) ينطبق (C_g)	0,25
من أجل $0\langle x\langle 1$: $h(x)=-g(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل .	0,25
8- تعيين مشتق الدالة φ :	
$$\varphi'(x)=(2e-x)\ln x \;\; ; x>0$$	0,5
9- حساب المساحة:	
من أجل $x>0$ لدينا: $\varphi'(x)=g(x)$	0,25
أي φ دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$	0,25
إذن: $$A=\int_1^e g(x)dx$$	0,25
$$A=[\varphi(x)]_1^e=\varphi(e)-\varphi(1)$$	0,25
$$A=\left(\frac{-1}{4}e^2+2e-\frac{1}{4}\right).ua$$	0,25

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 7 .

2- استنتج باقي قسمة : $(1954)^{1830} + 3^{1962} + (2012)^{2010}$ على 7 .

3- بين أن العدد $x.3^{2x} + 3x$ يقبل القسمة على 4 حيث x عدد طبيعي .

4- عين مجموعة الأعداد الطبيعية x بحيث : $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[28]$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

1- انشر العبارة : $(3+i)^2$

2- نعتبر العدد المركب : $P(Z) = 2Z^3 + 2(2-i)Z^2 - 3iZ + 7 - 4i$ حيث Z عدد مركب .

أ) احسب $P(-i)$.

ب) حلّل $P(Z)$ إلى جداء عاملين .

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z) = 0$ حيث Z_1 الحل الذي جزؤه الحقيقي سالب و Z_2 الحل الآخر و Z_0 الحل التخيلي صرف .

3- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس نعتبر النقط A و B و C صور الأعداد $-i$ ، $\frac{-5+i}{2}$ ، $\frac{1+3i}{2}$ على الترتيب . وليكن S التحويل النقطي الذي يحول A إلى B ويحول C إلى المبدأ O .

- عين طبيعة S .

4- لتكن (C) الدائرة ذات القطر $[AC]$. عين صورة (C) بالتحويل S .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x) = x - 3 + 2ln|x-1|$

و(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن (C_f) يقبل مماسا (Δ) ميله (-1) .

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,37 < \alpha < 2,38$.

5) بين أن (C_f) يقطع المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ في نقطتين يطلب تعيينهما .

6) احسب كل من $f(-2)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ثم أنشئ (C_f) و (D) و (Δ) .

7) عين الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto (x-1)ln(x-1) - x$.

8) احسب مساحة الحيز المستوي $I(\alpha)$ المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=x$ ، $x=\alpha$ ، $x=2$.

- بين أن : $I(\alpha)=\alpha^2+\alpha-7$.

- عين حصرا للمساحة $I(\alpha)$.

9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x+ln(x-1)^2-m=0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصـــر الإجـــابـــة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	**1- بواقي قيمة** 3^n **على** 7 **:**		5 ن
	$3^6 \equiv 1[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^0 \equiv 1[7]$	1	
	$3^{6K+5} \equiv 5[7]$ ، $3^{6K+4} \equiv 4[7]$ ، $3^{6K+3} \equiv 6[7]$ ، $3^{6K+2} \equiv 2[7]$ ، $3^{6K+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6K} \equiv 1[7]$	0,75	
	2- استنتاج باقي القيمة :		
	لدينا : $1962 = 6\times 327$ ، $2010 = 6\times 335$ ، $2012 \equiv 3[7]$ ، $1954 \equiv 1[7]$	0,75	
	ومنه: $(2012)^{2010} + 3^{1962} + (1954)^{1830} \equiv 1+1+1[7]$	0,5	
	أي باقي القيمة هو 3.		
	3- لدينا: $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ **و** $9 \equiv 1[4]$	0,25	
	ومنه: $3^{2x} \equiv 1[4]$ **وبالتالي:** $x.3^{2x} + 3x \equiv 4x[4]$	0,25	
	إذن: $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[4]$	0,25	
	4- تعيين قيم x **بحيث:** $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[28]$		
	أي: $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[4]$ **و** $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[7]$	0,5	
	لأن: $28 = 4.7$ **و** 4 **و** 7 **أوليان فيما بينهما.**		
	حسب السابق من أجل كل x **من** $\mathbb{N}$ **:** $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[4]$		
	***من أجل** $x = 3k$ **لدينا:** $x.3^{2x} + 3x \equiv 5k[7]$		
	ومنه: $5k \equiv 0[7]$ **أي:** $k = 7h$ **مع** $h \in \mathbb{N}$ **أي:** $x = 21h$	0,25	
	***من أجل** $x = 3k+1$ **لدينا:** $x.3^{2x} + 3x \equiv k+5[7]$	0,25	
	ومنه: $k+5 \equiv 0[7]$ **أي:** $k \equiv 2[7]$		
	أي: $k = 7h+2$ **مع** $h \in \mathbb{N}$ **وبالتالي:** $x = 21h+7$	0,25	
	***من أجل** $x = 3k+2$ **لدينا:** $x.3^{2x} + 3x \equiv 0[7]$		
	إذن قيم x **هي** $21h$ ، $21h+7$ ، $3h+2$ **مع** h **من** $\mathbb{N}$		

حل التمرين 2			
5 ن	0,25 0,5 0,25 0,25 0,75 0,25	1- النشر: $(3+1)^2 = 8+6i$ 2- أ- حساب $P(i)$: $P(-i) = 2i-4+2i-3+7-4i = 0$ ب- التحليل: حسب السابق نجد: $P(z) = (z+i)(2z^2+az+b)$ $= 2z^3 + (2i+a)z^2 + (ia+b)z + ib$ وبالمطابقة نجد: $a = 4-4i$ ، $b = -4-7i$ ومنه: $P(z) = (z+i)[2z^2 + 4(1-i)z - 4 - 7i]$	حل التمرين 2
	0,25 0,25 0,5 0,25 0,25 0, 5 0,5 0,25	ج- حل المعادلة $P(z)=0$: إما $z=-i$ أو $2z^2+4(1-i)z-4-7i=0$ ومنه: $\Delta' = 8+6i$ أي: $\Delta' = (3+i)^2$ ومنه: $z = \frac{-5+i}{2}$ أو $z = \frac{1+3i}{2}$ إذن الحلول هي: $z_0 = -i$ ، $z_1 = \frac{-5+i}{2}$ ، $z_2 = \frac{1+3i}{2}$ 3- طبيعة التحويل S : عبارته من الشكل: $z' = \alpha z + \beta$ يحول A إلى B أي: $\frac{-5+i}{2}C = \alpha(-i) + \beta$ يحول C إلى O أي: $0 = \alpha\left(\frac{1+3i}{2}\right) + \beta$ ومنه بالطرح نجد: $\frac{-5+i}{2} = \alpha\left(\frac{-1-5i}{2}\right)$ أي: $\alpha = -i$ ومنه: $\beta = \frac{-3+i}{2}$ لدينا: $\lvert\alpha\rvert = 1$ وعمدة α هي : $\frac{-\pi}{2}$ إذن التحويل S دوران زاويته $\frac{-\pi}{2}$ ومركزه ω ذات اللاحقة: $\frac{\beta}{1-\alpha}$ أي: $\omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$	

10	0,5 0,25 0,5 0,25 0,5 0,5 0,5 0,5	1- تغيرات f : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$ $f'(x)=1+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}$ إشارة $f'(x)$ هي: $-\infty$ … -1 (0) … 1 (‖) … $+\infty$: + , - , + 2- جدول تغيرات f : x: $-\infty$, -1, 1, $+\infty$ — $f'(x)$: + 0 - ‖ + — $f(x)$: من $-\infty$ إلى $f(-1)$ ثم إلى $-\infty$ ‖ من $-\infty$ إلى $+\infty$ 3- مماس ميله -1 أي: $f'(x)=-1$ ومنه: $x=0$ إذن يوجد مماس (Δ) ميله -1 . 4- لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2{,}37\ ;\ 2{,}18]$ و $f(2{,}37)\approx-3{,}78$ ، $f(2{,}38)\approx0{,}02$	حل التمرين 3

Variation table:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

	0,5	إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد α وحيد حيث: $2,37 < \alpha < 2,18$ و $f(\alpha)=0$	
	0,25	5- تقاطع (C_f) مع (D) أي: $f(x)=x$	
	0,5	ومنه: $ln\lvert x-1\rvert=\frac{3}{2}$ ومنه: $x=1+e^{\frac{3}{2}}$ أو $x=1-e^{\frac{3}{2}}$	
		إذن (C_f) يقطع (D) في نقطتين هما:	
	0,5	$A\left(1+e^{\frac{3}{2}}\ ;\ 1+e^{\frac{3}{2}}\right)$ و $B\left(1-e^{\frac{3}{2}}\ ;\ 1-e^{\frac{3}{2}}\right)$	
	0,75	6- لدينا: $f(0)=-3$ ، $f(2)=-1$ ، $f(-2)=-5+2ln3$	
	1	إنشاء (C_f) و (Δ) و (D):	
	0,5	7- الدالة المشتقة هي: $x \mapsto ln(x-1)$	
		8- حساب المساحة:	
	0,25	$\mathrm{I}(\alpha)=\int_2^{\alpha}\left(x-f(x)\right)dx=\left[5x-2(x-1).ln(x-1)\right]_2^{\alpha}$ u.a	
	0,25	$\mathrm{I}(\alpha)=\left[5\alpha-2(\alpha-1)ln(\alpha-1)-10\right]u.a$	
		لدينا من السابق $f(\alpha)=0$ أي: $ln(\alpha-1)=\frac{3-\alpha}{2}$	
	0,25	ومنه: $\mathrm{I}(\alpha)=5\alpha-2(\alpha-1)\frac{3-\alpha}{2}-10$ أي: $\mathrm{I}(\alpha)=\alpha^2+\alpha-7$	

	لدينا: $2,37 < \alpha < 2,38$ ومنه: $5,61 < \alpha^2 < 5,66$ بالتالي: $0,98 < I(\alpha) < 1,04$ 8- المناقشة: المعادلة هي: $f(x) = m - 3$ وعليه: * لما $m < 0$ للمعادلة حلين موجبين وحل سالب * لما $m = 0$ للمعادلة حل موجب وحل معدوم وحل سالب * لما $0 < m < 2ln2 - 1$ للمعادلة حل موجب وحلين سالبين * لما $m = 2ln2 - 1$ للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة * لما $m > 2ln2 - 1$ للمعادلة حل واحد موجب	0,25 0,25 0,75	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \alpha U_n + \beta$

حيث α و β عددان حقيقيان غير معدومين و يختلفان عن 1 .

1- جد علاقة تربط α و β حتى تكون (U_n) ثابتة .

2- نعتبر أن (U_n) غير ثابتة ونعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \gamma$

حيث γ عدد حقيقي غير معدوم .

أ) عبر عن γ بدلالة α و β حتى تكون (V_n) متتالية هندسية .

ب) نضع $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ و $\gamma = 1$.

احسب $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ و $t_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$.

التمرين الثاني : (6 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^4 - 4Z^3 + 14Z^2 - 36Z + 45 = 0$.

1- تحقّق أن المعادلة تقبل حلين تخيلين مترافقين Z_0 و $\overline{Z}_0$ حيث Z_0 هو الحل الذي جزءه التخيلي موجب .

2- استنتج الحلين الآخرين Z_1 و Z_2 حيث Z_1 هو الحل الذي جزءه التخيلي موجب .

3- نعتبر النقط A ، B ، C ، D صور الحلول $3i$ ، $2+i$ ، $2-i$ ، $-3i$ على الترتيب .

- عين العناصر المميزة للتحويل T الذي يحول A إلى B و C إلى D .

التمرين الثالث : (9 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty ; 0]$ بالعبارة : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x+1} - x - 2$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty ; 0]$.

2- احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $f(0)$.

3- شكّل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty ; 0]$.

4- احسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x + 2]$. واستنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) .

5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

6- ارسم (Δ) و (C_f) .

7- احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=0$ و $x=\alpha$ و $y=-x-2$ حيث α عدد حقيقي سالب تماما .

8- نعرف متتالية عددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_n = A(-n)-4e$.

أ) أثبت أن (U_n) متتالية هندسية .

ب) احسب : $P = U_0^2 \times U_1^2 \times ... \times U_n^2$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عنـــاصــــر الإجـــــابــــة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1- إيجاد العلاقة:		5 ن
	المتتالية ثابتة أي: $\forall n \in \mathbb{N} : \ U_n = U_0$ ومنه: $-2 = -2\alpha + \beta$	1	
	2-أ- التعبير عن γ:	0,5	
	لدينا: $V_{n+1} = U_{n+1} + \gamma = 2U_n + \beta + \gamma$		
	ومنه: $V_{n+1} = \alpha\left(V_n - \gamma\right) + \beta + \gamma = \alpha.V_n - \alpha.\gamma + \beta + \gamma$	1	
	حتى تكون المتتالية هندسية يجب أن يكون: $-2\gamma + \beta + \gamma = 0$		
	ومنه: $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$	1	
	ب- حساب المجموعتين: $S_n = V_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = (-1)\dfrac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - 3^{n+1}\right)$	1	
	$L_n = \left(V_0 - 1\right) + \left(V_1 - 1\right) + \ldots + \left(V_n - 1\right) = S_n - (n+1) = \dfrac{1}{2}\left(1 - 3^{n+1}\right) - (n+1)$	0,5	
حل التمرين 2	1) المعادلة تقبل حل تخيلي أي من الشكل αi حيث :	0,25	6 ن
	$\alpha^4 + 4i\alpha^3 - 14\alpha^2 - 36\alpha i + 45 = 0$ و منه : $\begin{cases} \alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 = 0 \\ 4\alpha(\alpha^2 - 9) = 0 \end{cases}$	0,75	
	و منه : $\alpha = -3$ أو $\alpha = 3$.	0,5	
	إذن : $Z_0 = 3i$ و $\overline{Z_0} = -3i$.	0,5	
	2) من السابق المعادلة تكافئ : $(Z + 9)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$	1	
	و منه : $Z^2 - 4Z + 5 = 0$ إذن: $Z_1 = 2 + i$ و $Z_2 = 2 - i$.	1	
	3) تعيين العناصر المميزة للتحويل T: عبارته $Z' = aZ + b$	0,25	
	التحويل يحول A إلى B أي: $2 + i = a(3i) + b$	0,25	
	و يحول C إلى D أي: $-3i = a(2 - i) + b$	0,25	
	بالطرح نجد : $a = \dfrac{3 - 4i}{5}$ و منه $b = \dfrac{-2 - 4i}{5}$	0,5	
	لدينا : $\lvert a \rvert = 1$ و منه التحويل هو دوران زاويته عمدة a و مركزه $\omega(-1;0)$	0,75	

حل التمرين 3 — 9 ن

1- اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x+1}-1$ — 0,5

$f'(x)=0$ أي: $x=-2$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		-	0	+	

— 0,5

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;0]$ — 0,5

و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ — 0,5

2- لدينا: $f(0)=2e-2$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ — 1

3- جدول التغيرات: — 0,5

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$

$f(-2)=2$; $f(0)\approx 0,27$ — 0,5

4- لدينا: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]=0$ — 0,5

ومنه: $y=-x-2$ معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) — 0,5

5- الوضعية: $f(x)-(-x-2)=2e^{\frac{1}{2}x+1}$ — 0,5

ومنه: $f(x)+x+2>0$ أي (C_f) فوق (Δ)

6- رسم (Δ) و (C_f) : — 1

		7- المساحة:	
	0,5	لدينا : $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}\left(f(x)+x+2\right)dx$	
	0,5	و منه: $A(\alpha)=\left[4e^{\frac{1}{2}x+1}\right]_{\alpha}^{0}u.a=\left(4e-4e^{\frac{1}{2}\alpha+1}\right)u.a=4e\left(1-e^{\frac{1}{2}\alpha}\right)u.a$	
	0,25	8- لدينا: $U_n=A(n)-4e=-4e\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{n}$	
	0,25	أ- عبارة U_n هي عبارة حد عام لمتتالية هندسية أساسها $\sqrt{e}$	
	0,5	وحدها الأول $U_0=-4e$	
	0,5	ب- لدينا: $P=\left(U_0^2\right)^{n+1}.e^{1+2+...+n}=16e^{2n+2}.e^{\frac{n(n-1)}{2}}=16e^{\frac{n^2+5n+4}{2}}$	

<table>
<tr><td colspan="4">الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد</td></tr>
<tr><td colspan="4">امتحان المستوى – دورة ماي 2010</td></tr>
<tr><td>المستوى والشعبة: 3 ثانوي تجريبية</td><td>المادة: رياضيات</td><td>التوقيت: 8 سا - 10 سا</td><td></td></tr>
</table>

التمرين الأول : (5 نقاط)

1- احسب $(2+i)^2$.

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(Z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(Z^2+iZ-i-i\right)=0$.

3- نفرض Z_1 ، Z_2 ، Z_3 حلول المعادلة حيث Z_3 هو الحل الحقيقي .

أ) اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري و Z_2 الحل الذي جزؤه الحقيقي موجب .

ب) اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الأسي .

ج) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

(π) و (π') مستويان معادلتيهما على الترتيب هما : $3x+2y-z+1=0$ و $-x+3y+3z+2=0$

ولتكن النقط $A(1;1;6)$ ، $B(0;0;1)$ ، $C\left(2\,;\frac{-21}{8};\frac{7}{4}\right)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة مما يلي :

1) المستويان (π) و (π') متعامدان .

2) المستوي (ABC) هو المستوي (π) .

3) C هي نقطة من (π) و (π') .

4) المستقيم (AB) عمودي على المستوي (π') .

5) المسافة بين A و (π')هي : $\frac{20}{\sqrt{19}}$.

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I - لتكن f دالة معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x}{x+2}+ln(x+2)$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2) احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α في المجال $\left]\frac{-3}{5};\frac{-1}{2}\right[$.

4) استنتج إشارة $f(x)$.

II - نعتبر الدالة g المعرفة على $]-2;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=1+x\,ln(x+2)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 2cm .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة g .

4) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

5) بين أن : $g(\alpha)=1-\frac{\alpha^2}{\alpha+2}$.

6) بأخذ $\alpha=-0,55$ احسب $g(\alpha)$ ثم ارسم (C_g) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1) الحساب: $(2+i)^2 = 3+4i$	0,5	5 ن
	2) حل المعادلة: إما $Z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $Z^2+iZ-i-1=0$	0,25	
	لدينا : $\Delta = 3+4i = (2+i)^2$ وبالتالي: $Z=-1-i$ أو $Z=1$	1	
	إذا الحلول هي : $Z_1=-1-i \; ; \; Z_2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; Z_3 = 1$	0,25	
	3 - أ) الشكل الجبري : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	1	
	ب) الشكل الأسي : $\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$	1	
	ج) الاستنتاج : من السابق نجد :		
	$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	0,5 0,5	
حل التمرين 2	1) لدينا : $\vec{v}(3;2;-1)$ و $\vec{v'}(-1;3;3)$	0,5	5 ن
	و منه : $\vec{v}\cdot\vec{v'} = -3+6-3=0$ أي : $\vec{v}\perp\vec{v'}$	0,5	
	إذن صحيح أن : $(\pi)\perp(\pi')$		
	2) لدينا النقط A,B,C من المستوي (π) لأن إحداثياتها تحقق المعادلة	0,5	
	و بالتالي المستوي (ABC) هو المستوي (π) .	0,5	
	3) إحداثيات C لا تحقق معادلة (π') .	0,5	
	إذن C ليست من (π') و بالتالي C من (π) و (π') خطأ .	0,5	
	4) لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;-5)$ و منه : $\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{-1}$	0,5	
	إذن $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\vec{v'}$ و بالتالي (AB) عمودي على (π') خطأ .	0,5	
	5) المسافة بين A و (π') هي: $d = \frac{\lvert -1+3+18+2 \rvert}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{22}{\sqrt{19}}$	0,5	
	و بالتالي المسافة $\frac{20}{\sqrt{19}}$ خطأ .	0,5	

حل التمرين 3 — 10ن

I- 1) اتجاه تغير الدالة f : (0,5)

لدينا : $f'(x)=\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x+4}{(x+2)^2}$

و بالتالي $f'(x)>0$ لما $x>-2$ (0,5)

أي f متزايدة تماما على المجال $]-2\,;+\infty[$.

2) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (1)

3) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\dfrac{-3}{5}\,;\dfrac{-1}{2}\right]$ (0,5)

و $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{-2}{3}+ln\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$; $f\left(\dfrac{-3}{5}\right)=\dfrac{-3}{7}+ln\left(\dfrac{7}{5}\right)<0$ (0,5)

إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد α وحيد من المجال $\left[\dfrac{-3}{5}\,;\dfrac{-1}{2}\right]$

يحقق $f(\alpha)=0$

4) مما سبق إشارة $f(x)$ هي : (0,5)

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- 1) اتجاه تغير الدالة g :

لدينا : $g'(x)=f(x)$ (0,5)

و منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$ السابقة الذكر و عليه : (0,5)

لما $-2\le x\le\alpha$ الدالة g متناقصة تماما . (0,5)

لما $\alpha\le x$ الدالة g متزايدة تماما .

2) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} g(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (1)

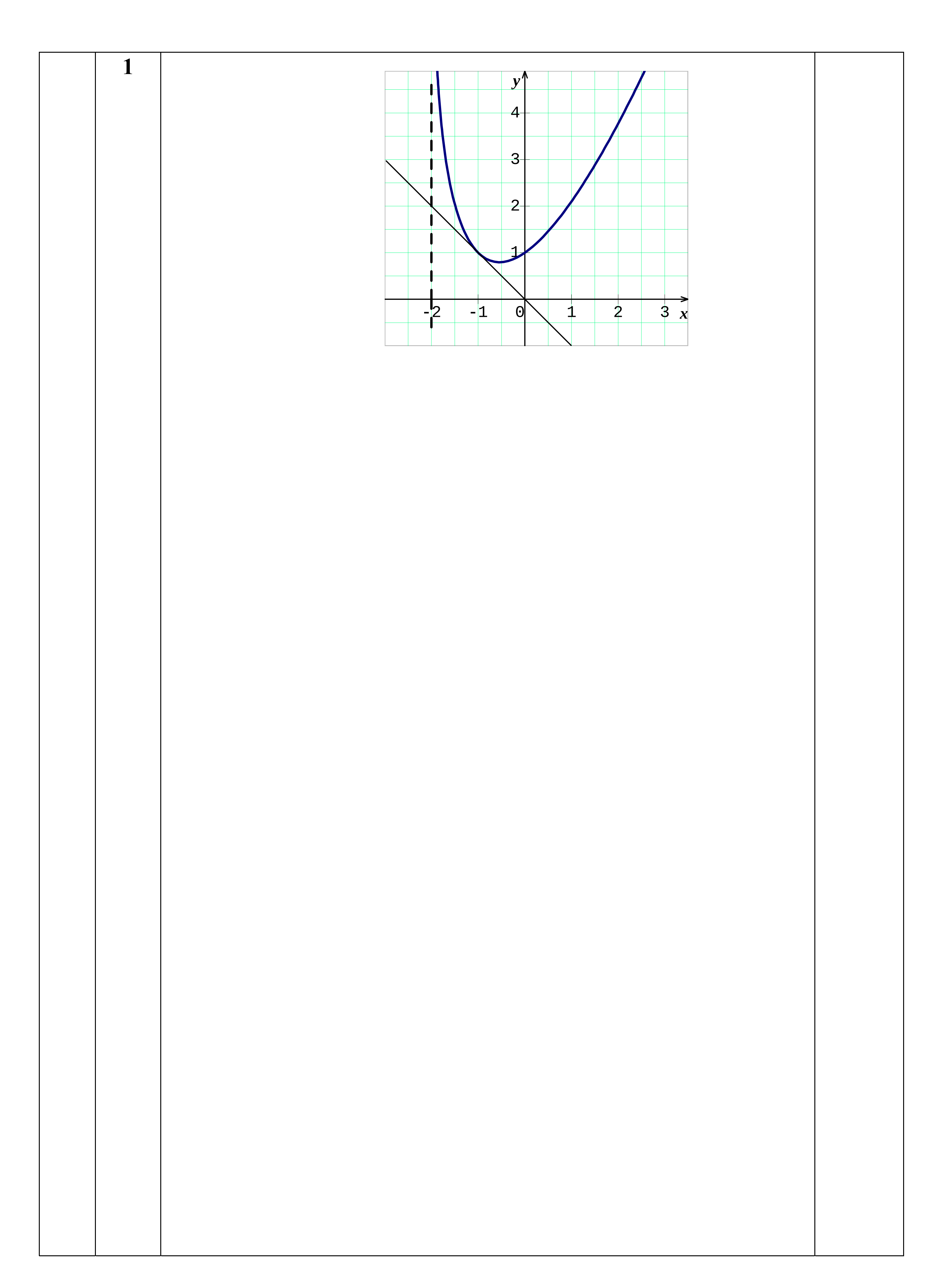
3) جدول التغيرات : (0,5)

α	-2		α		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) معادلة المماس : $y=-x$ (1)

5) من $f(\alpha)=0$ نجد $ln(\alpha+2)=\dfrac{-\alpha}{\alpha+2}$ و منه $g(\alpha)=1-\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}$ (1)

6) $g(\alpha)\approx 0{,}8$ (0,5)


1
y
4
3
2
1
-2
-1
0
1
2
3
x

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

نعتبر العدد المركب Z حيث : $Z = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$.

1- اكتب Z على الشكل الجبري .

2- اكتب Z على الشكل المثلثي ثم الأسي .

3- استنتج $\cos\frac{13\pi}{12}$ ، $\sin\frac{13\pi}{12}$ (تعطى القيم المضبوطة) .

4- اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : Z^{2010} ، $\frac{1}{Z}$ ، $\overline{Z}$.

5- احسب Z^{12} ثم استنتج أن Z^{12k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته :
$-x+4y+3=0$ والنقط $A(-1\ ;2\ ;-1)\ ,B(\alpha\ ;4\ ;1)\ ,C(0\ ;-2\ ;-1)$ حيث α عدد حقيقي .

1- عين α حتى تكون B نقطة من المستوي π الذي معادلته : $4x+y-z+1=0$.

2- نفرض $\alpha=-1$: تحقق أن النقط A و B و C ليست في استقامية وأن المستوي (ABC) هو (π) .

3- تحقّق أن (P) و (π) متعامدان .

4- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (π) .

5- احسب المسافة بين C و (Δ) .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = 2x^2+1-\ln x$.

1- احسب نهايات الدالة g عند طرفي مجموعة التعريف .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

3- استنتج إشارة الدالة g .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ حيث : $f(x)=2x+2+\dfrac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

* شل جدول تغيرات الدالة f .

3- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+2)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C_f).

* ادرس وضعية المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

4- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

5- أنشئ (C_f) .

6- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معدلاتها :

$y=2x+2$ و $x=1$ و $x=e^2$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد

تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية — المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1 – الشكل الجبري: $Z = \frac{(-1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{-\sqrt{3}-1}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\, i$	1	5 ن
	2 – الشكل المثلثي: $z = \frac{\left[\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{4}\right]}{\left[2 ; \frac{\pi}{6}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{13\pi}{12}\right]$	0,5 0,25	
	- الشكل الأسي: $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$	0,25	
	3 – الاستنتاج : مما سبق لدينا		
	$\cos \frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-1}{4} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0,5	
	$\sin \frac{13\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	0,5	
	4 – الشكل الأسي : $\bar{Z} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{13\pi}{12}}$; $\frac{1}{Z} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{13\pi}{12}}$	0,5	
	حسب موافر نجد :		
	$Z^{2010} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2010} ; \frac{13\pi}{12} . 2010\right] = \left[\frac{1}{2^{1005}} ; \frac{13\pi}{2}.335\right]$	0,25	
	و منه : $Z^{2010} = \left[2^{-1005} ; \frac{-\pi}{2}\right] = 2^{-1005} e^{-i\frac{\pi}{2}}$	0,25	
	5 الحساب :		
	$Z^{12} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} ; 13\pi\right] = \left[\frac{1}{2^6} ; \pi\right] = \frac{-1}{64}$	0,5	
	$Z^{12k} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12k} ; 13k\pi\right] = \left[2^{-6k} ; k\pi\right]$	0,5	
	اذن Z^{12k} عدد حقيقي .		

<table>
<tr>
<td>حل التمرين 2</td>
<td>1 – تعيين α :
B من (π) أي: $4\alpha + 4 - 1 + 1 = 0$ و منه : $\alpha = -1$.
2 – لدينا : $\overrightarrow{AB}(0;2;2)$; $\overrightarrow{AC}(1;-4;0)$
نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overrightarrow{AC}$ و منه النقط $A;B;C$ ليست في استقامية و بما أن إحداثيات $A;B;C$ تحقق معادلة فإن: $(ABC)=(\pi)$</td>
<td>0,5
0,5
1</td>
<td>5 ن</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>3- التحقق أن : $(P)\perp(\pi)$
الشعاع الناظم لـ (P) هو : $\vec{v}(-1;4:0)$
الشعاع الناظم لـ (π) هو : $\vec{u}(4;1;-1)$
و منه : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ أي $\vec{u}\perp\vec{v}$.
4 - التمثيل الوسيطي : $(\Delta):\begin{cases}-x+4y+3=0\\4x+y-z+1=0\end{cases}$
من أجل الوسيط الحقيقي k و بأخذ $x=k$ نجد :
$(\Delta):\begin{cases}x=k\\y=\frac{1}{4}k-\frac{3}{4}\\z=\frac{17}{4}k+\frac{1}{4}\end{cases}$
5 - حساب المسافة :
مما سبق ينتج أن المسافة بين C و (Δ) هي المسافة بين C و (p)
و عليه : $d=\frac{\lvert -8+3\rvert}{\sqrt{1+16}}=\frac{5}{\sqrt{17}}$</td>
<td>0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5</td>
<td></td>
</tr>
</table>

حل التمرين 3	I– 1) النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = +\infty$ 2 -) اتجاه تغير الدالة g : $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$ إشارة $g'(x)$ هي : $\xrightarrow{0 \quad - \quad \frac{1}{2} \quad + \quad +\infty}$ إذن g متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ و g متناقصة تماما على المجال $\left]0 ; \frac{1}{2}\right]$ إشارة $g(x)$: لدينا	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5	10ن

x	$-\infty$ $1/2$ $+\infty$
$g'(x)$	- o +
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $2+ln2$ ↗ $+\infty$

ومن أجل $x > 0$: $g(x) > 0$. 0,5

II– 1) النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = -\infty$ 0,5

2 -) لدينا : $f'(x) = 2 + \frac{1 - ln\ x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ 0,5

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. 0,5

0,5

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

– المستقيم المقارب المائل :

0,5 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(x)}{x}=0$

0,5 إذن $y=2x+2$ معادلة المستقيم المقارب المائل

من أجل $x>1$: (C_f) فوق (Δ) .

0,75 من أجل $0<x<1$: (C_f) تحت (Δ).

من أجل $x=1$: (C_f) يقطع (Δ) .

0,25 - 4) لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

0,5 و $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{2}-8\,ln2<0$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3-2\,ln2>0$

0,5 إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة

فاصلتها α حيث : $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

- 5) رسم (C_f):

1

- 6) حساب المساحة :

1 $A=\int_1^{e^2}[f(x)-(x+2)]\,dx=\int_1^{e^2}\left(\dfrac{1}{x}.ln\,x\right)dx=\dfrac{1}{2}\left[(ln\,x)^2\right]_1^{e^2}ua$

و منه : $A=2ua$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2010	

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (4 نقاط)

نرمي 6 مرات حجر نرد مكعب وغير مزور مرقم من 1 إلى 6 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 2 .

1- ما هو احتمال الحصول على 3 مرات على مضاعف 2 ؟

2- ما هو احتمال الحصول على 5 مرات على الأكثر على مضاعف العدد 2 ؟

التمرين الثاني : (6 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(Z^2-8\sqrt{3}Z+64\right)\left[Z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)Z+2\left(\sqrt{2}+2\right)\right]=0$

2) نعتبر العددان المركبان : $Z_1=4\left(\sqrt{3}+i\right)$ ، $Z_2=4\left(\sqrt{3}-i\right)$

أ) احسب $\left(\frac{Z_1}{8}\right)^{2011}$ و $\left(\frac{Z_2}{8}\right)^{2012}$.

ب) عين مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة Z بحيث : $16\times\left|Z-2\right|=\left|Z_1\times Z_2\right|$

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=a+bxe^{-x}$.

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

بقراءة بيانية عين a و b.

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g\left(x\right)=1-xe^{-x}$.

1- احسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g

3- شكّل جدول تغيرات الدالة g

4- اكتب معادلة المماس للمنحنى $\left(C_g\right)$ عند النقطة التي ترتيبها 1 .

5- بين أن $\left(C_g\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

6- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $h\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{-x}$

احسب $h'\left(x\right)$ مستنتجا دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

7- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_g\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=1$ و $x=0$ و $x=1$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد

تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية — المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	لدينا تجربة برنولي بالوسيطين : 6 ، $\frac{1}{2}$	0,5	4 ن
	1) احتمال الحصول على 3 مرات على مضاعف 2 : $P(x=3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 . \frac{1}{64} = \frac{1}{32}$	1,5	
	2) احتمال الحصول على 5 مرات على الأكثر على مضاعف 2 : $P(x \le 5) = 1 - P(x > 6) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$	2	
حل التمرين2	1) حل المعادلة :		6 ن
	- إما: $Z^2 - 8\sqrt{3}\,Z + 64 = 0$ و منه $\Delta' = -16$ أي : $\Delta' = (4i)^2$	0,5	
	و منه : $Z = 4\left(\sqrt{3} + i\right)$ أو $Z = 4\left(\sqrt{3} - i\right)$	0,5	
	- إما: $Z^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)Z + 2\left(\sqrt{2} + 2\right) = 0$	0,5	
	و منه : $\Delta' = -1$ أي: $\Delta' = (i)^2$	0,5	
	و منه : $Z = 1 + \sqrt{2} + i$ أو $Z = 1 + \sqrt{2} - i$		
	2-أ) لدينا : $\frac{Z_1}{8} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ و منه: $\frac{Z_1}{8} = \left[1 ; \frac{\pi}{6}\right]$	0,25	
	حسب دستور موافر $\left(\frac{Z_1}{8}\right)^{2011} = \left[1 ; \frac{2011\,\pi}{6}\right]$	0,5	
	منه: $\left(\frac{Z_1}{8}\right)^{2011} = \left[1 ; \frac{-5\pi}{6}\right]$ إذن: $\left(\frac{Z_1}{8}\right)^{2011} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	0,25	
	لدينا : $\left(\frac{Z_2}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و منه : $\frac{Z_2}{8} = \left[1 ; \frac{-\pi}{6}\right]$	0,25	
	حسب دستور موافر $\left(\frac{Z_2}{8}\right)^{2012} = \left[1 ; \frac{-2012\pi}{6}\right]$	0,5	
	منه : $\left(\frac{Z_2}{8}\right)^{2012} = \left[1 ; \frac{2\pi}{3}\right]$ إذن: $\left(\frac{Z_2}{8}\right)^{2012} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	0,25	
	- ب) مجموعة النقط بحيث : $16\left\|Z - 2\right\| = \left\|Z_1 \times Z_2\right\|$ و منه: $16\left\|Z - 2\right\| = 64$	0,5	
	أي: $\left\|Z - 2\right\| = 4$ و منه : $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4^2$	0,5	
	إذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $\omega(2;0)$ و نصف قطرها 4 .	1	

حل التمرين 3			
	I – تعيين a و b :		10ن
	من البيان نلاحظ أن $f(0)=1$ و منه : $a=1$	1	
	و كذلك: $f(1)=1-\frac{1}{e}$ أي: $1+b.e^{-1}=1-\frac{1}{e}$ ومنه: $b=-1$	1	
	II– 1) النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$	1	
	2) اتجاه التغير: لدينا: $g'(x)=-e^{-x}+x\,e^{-x}=e^{-x}(x-1)$	0,5	
	إشارة $g'(x)$ هي: x: $-\infty$ … 1 … $+\infty$ ؛ الإشارة: - 0 +	0,5	
	لما $x\le 1$ الدالة g متناقصة تماما ؛ لما $x\ge 1$ الدالة g متزايدة تماما .	0,5	
	3) جدول التغيرات :	0,75	

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$1-e^{-1}$	↗ $+\infty$

	4) معادلة المماس عند النقطة التي ترتيبها 1 فاصلتها 0 لأن : $g(0)=1$	0,5	
	ومنه المعادلة هي : $y=g'(0)(x-0)+g(0)$ أي: $y=-x+1$	0,5	
	5) نقطة الانعطاف : $g''(x)=e^{-x}(2-x)$	0,5	
	نلاحظ أن $g''(x)$ ينعدم مغيرا إشارته عند 2	0,25	
	و بالتالي $A(2\,;1-2e^{-2})$ نقطة انعطاف .	0,5	
	6) لدينا : $h'(x)=-x\,e^{-x}$	0,5	
	ومنه الدالة الأصلية هي G حيث : $G(x)=x+(x+1)\,e^{-x}$	0,5	
	7) المساحة :		
	$A=\int_0^1\left(1-g(x)\right)dx=\int_0^1 x\,e^{-x}dx=h(0)-h(1)$	1	
	و منه : $A=\left(1-\frac{2}{e}\right)$ u . a .	0,5	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد			
امتحان المستوى – دورة ماي 2010			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{2}{3}$ و من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_{1+1} = \frac{3}{2}U_n + \frac{1}{4}$.

و لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n = -2U_n - 1$.

1- احسب U_1 ، U_2 ، V_0 ، V_1 ، V_2 .

2- برهن أن (V_n) متتالية هندسية معينا أساسها .

3- احسب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

4- احسب كل من المجموعين : $S_1 = V_0 + V_1 + ... + V_n$ ؛ $S_2 = U_0 + U_1 + ... + V_n$

5- احسب الجداء $P = V_0 \times V_1 \times ... \times V_n$ $...V_n$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-i$ العدد المركب $Z' = \frac{Z-i}{Z+i}$. نضع $Z = x + iy$ و M نقطة من المستوي لاحقتها Z .

1- احسب كل من $\text{Re}(Z')$ و $\text{Im}(Z')$.

2- عين E مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف .

3- عين F مجموعة النقط M بحيث يكون $arg(Z') = \frac{\pi}{4}$.

4- نضع $Z = \sqrt{3}$. احسب Z'^{2010} .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I - لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x - 1 + ln\,x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$.

2) احسب نهايات الدالة g على أطراف مجموعة التعريف .

3) احسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{x-1}{x}\ln x$. $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني .

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أنه يمكن كتابة $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}\ln x$.

5) عين الدالة المشتقة للدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث : $h(x)=x\ln x-x$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f .

6) ادرس إشارة الدالة f .

7) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1$ و $x=e$ و $y=0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد

تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1) الحساب : $v_2 = \frac{-21}{4}\ ;\ v_1 = \frac{-7}{2}\ ;\ v_0 = \frac{-7}{3}\ ;\ u_2 = \frac{17}{8}\ ;\ u_1 = \frac{5}{4}$	01ن	5 ن
	2) لدينا : $v_{n+1} = -2u_{n+1} - 1 = -2\left(\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{4}\right) - 1$ $v_{n+1} = -3u_n - \frac{3}{2} = -3\left(\frac{v_n - 1}{2}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{-3}{2}$ و حدها الأول v_0 .	01ن	
	3) عبارة الحد العام : $v_n = v_0 \times \left(\frac{-3}{2}\right)^n = \frac{-7}{3} \times \left(\frac{-3}{2}\right)^n$	01ن	
	و منه: $u_n = \frac{v_n - 1}{2} = -\frac{7}{6} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2}$	01ن	
	4) حساب المجموع : $S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $S_1 = \frac{-7}{3}\left[1 - \left(\frac{-3}{2}\right)^{n+1}\right] \times \frac{9}{5} = -\frac{14}{15}\left[1 - \left(\frac{-3}{2}\right)^{n+1}\right]$ $S_2 = \left(\frac{v_0 - 1}{2}\right) + \left(\frac{v_1 - 1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{v_n - 1}{2}\right) = \frac{1}{2}(S_1) - \frac{1}{2}(n+1)$ $S_2 = \frac{-7}{15}\left[1 - \left(\frac{-3}{2}\right)^{n+1}\right] - \frac{1}{2}(n+1)$		
	5) حساب الجداء : $P = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = (v_0)^{n+1} \times \left(\frac{-3}{2}\right)^{1+2+\ldots+n} = \left(\frac{-7}{3}\right)^{n+1} \times \left(\frac{-3}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$	01ن	

حل التمرين 2	1) حساب $Re(z')$ و $Im(z')$		5 ن
	لدينا: $Z' = \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$	0,5	
	و منه: $Re(z') = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ و $Im(z') = \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$	0,5	
	2) تعيين E :		
	Z' تخيلي صرف أي: $Re(z') = 0$ و $Im(z') \neq 0$	0,5	
	و منه : $x^2+y^2=1$ و $(x;y) \neq (0;-1)$ و $x \neq 0$	0,5	
	إذن E هي دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 ما عدى $B(0;1)$, $A(0;-1)$	0,5	
	3) تعيين F :		
	$\arg(z') = \frac{\pi}{4}$ أي: $Re(z') = Im(z')$ و $Im(z') > 0$	0,5	
	و منه: $(x+1)^2+y^2=2$ و $x<0$	0,5	
	إذن F هي قو س من دائرة مركزها $\omega(-1;0)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ بحيث $x<0$	0,5	
	4) حساب $(Z')^{2010}$ من أجل $Z=\sqrt{3}$:		
	لدينا : $Z' = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ و منه : $Z' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	0,25	
	و منه : $Z' = \left[1 ; \frac{-\pi}{3}\right]$ و حسب موافر: $(Z')^{2010} = \left[1^{2010} ; \frac{-2010\pi}{3}\right]$	0,5	
	إذن: $(z')^{2010} = [1 ; 0]$ أي: $(z')^{2010} = 1$.	0,25	

حل التمرين 3			
حل التمرين 3	I– 1) اتجاه تغير الدالة g : $g'(x)=1+\frac{1}{x}$ من أجل $x>0$ لدينا : $g'(x)>0$ ومنه g دالة متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$ 2) النهايات : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 3) إشارة $g(x)$: مما سبق نجد : (جدول التغيرات أدناه) و لدينا : $g(1)=0$ إذن لما $0<x<1$: $g(x)<0$ لما $x=1$: $g(x)=0$ لما $x>1$: $g(x)>0$ II-1) اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{x-1}{x}.\frac{1}{x}=\frac{x-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ و حسب السابق نجد : لما $0<x\le 1$ الدالة f متناقصة تماما ؛ لما $x\ge 1$ الدالة f متزايدة تماما 2) النهايات : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,5 0,25 0,25 1 0,5 0,5 0,5 0,5 1	10ن

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

جدول التغيرات :

1

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		**-**	**0**	**+**	
$f(x)$	$+\infty$	↘	**0**	↗	$+\infty$

0,5 — **4) لدينا :** $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\ln x=(1-\dfrac{1}{x}).\ln x$

0,5 — **و منه:** $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}\ln x$

0,5 — **5) الدالة الأصلية : لدينا :** $h'(x)=\ln x+x.\dfrac{1}{x-1}=\ln x$

0,5 — **الدالة الأصلية للدالة** f **هي** F **حيث:** $F(x)=x\ln x-x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

1 — **6) إشارة** $f(x)$ **موجبة و** $f(1)=0$

7) المساحة هي :

0,5 — **لدينا:** $A=\int_1^e f(x)dx=\left[F(e)-F(1)\right]\ u.a$

0,5 — **و منه:** $A=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}\ u.a$.

Intégrale = 0,5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد

امتحان المستوى – دورة ماي 2010

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	

التمرين الأول : (5 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_1 = 7$ و $U_2 = 11$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$

1- احسب U_3 ، U_4 ، U_5 . ضع تخمينا لعبارة U_n بدلالة n ثم برهن على صحته بالتراجع .

2- (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n = e^{U_n}$ حيث e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النيبيري .

أ) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب) احسب كل من المجموعين : $S_1 = U_1 + U_3 + ... + U_{2010}$ ؛ $S_2 = V_1 + V_2 + ... + V_n$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر العبارة $p(Z)$ حيث : $p(Z) = Z^4 - 2Z^3 + 4Z^2 - 4Z + 4$ و Z عدد مركب .

1- احسب $p(i\sqrt{2})$ ، $p(-i\sqrt{2})$.

2- عين الأعداد الحقيقية α و β و γ بحيث يكون من أجل كل Z : $p(Z) = (Z^2 + 2)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$

3- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(Z) = 0$ و لتكن Z_1 ؛ Z_2 ؛ Z_3 ؛ Z_4 حلولها .

4- اكتب الحلول على الشكل الأسي .

5- احسب : $\left(\frac{Z_4}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{Z_3}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{Z_2}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{Z_1}{\sqrt{2}}\right)^{1000}$.

التمرين الثالث : (10 نقاط)

I) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = e^x - x$.

- ادرس تغيرات الدالة f واستنتج إشارة $f(x)$.

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = ln(e^x - x)$.

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2- احسب نهايات الدالة g عند طرفي مجموعة التعريف .

3- شكّل جدول تغيرات الدالة g .

4- بين أنه يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل : $g(x)=x+ln(1-xe^{-x})$

واستنتج معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C_g) .

5- بين أن المنحنى (C_g) يقبل مماس (Δ) معامل توجيهه 1 .

6- احسب $g(-1)$ ، $g(-2)$ ، $g(1)$ ، $g(2)$ ثم أنشئ (C_g) و (Δ).

7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته :

$y=x+m$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2010	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة: رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	1) الحساب : $u_3 = 2u_2 - u_1 = 22 - 7 = 15$ $u_4 = 2u_3 - u_2 = 30 - 11$ $u_5 = 2u_4 - u_3 = 38 - 15$ التخمين : $u_n = 3 + 4n$ - البرهان بالتراجع: $u_1 = 3 + 4 = 7$ صحيح نفرض أن $u_n = 3 + 4n$ و أن $u_{n+1} = 3 + 4(n+1)$ و منه: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(7 + 4n) - (3 + 4n)$ أي: $u_{n+2} = 11 + 4n$ و منه: $u_{n+2} = 3 + 4(n+2)$ و هو المطلوب. إذن من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_n = 3 + 4n$. 2- أ) مما سبق نجد : $v_n = e^{3+4n}$ و منه: $v_{n+1} = e^{3+4n+4} = e^{3+4n} . e^4 = v_n . e^4$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^4 . - ب) المجموع : $S_1 = \frac{2010}{2}(u_1 + u_{2010}) = 1005(7 + 8043)$ و منه : $S_1 = 8090250$ لدينا: $S_2 = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$ و منه : $S_2 = e^7 . \frac{1 - e^{4n}}{1 - e^4}$		5 ن

حل التمرين 2 — 5 ن

1) الحساب :

$$p(-i\sqrt{2}) = (-i\sqrt{2})^4 - 2(-i\sqrt{2})^3 + 4(-i\sqrt{2})^2 - 4(-i\sqrt{2}) + 4$$

$$= 4 - 4i\sqrt{2} - 8 + 4i\sqrt{2} + 4 = 0$$

$$p(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^4 - 2(i\sqrt{2})^3 + 4(i\sqrt{2})^2 - 4(i\sqrt{2}) + 4$$

$$= 4 + 4i\sqrt{2} - 8 - 4i\sqrt{2} + 4 = 0$$

2) تعيين α, β, γ **:**

$$p(z) = (z^2 + 2)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$$

$$= \alpha z^4 + \beta z^3 + (2\alpha + \gamma) z^2 + 2\beta z + 2\gamma$$

بالمطابقة نجد : $\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = -2 \quad ; \quad \gamma = 2$

3) حل المعادلة :

إما $Z^2 + 2 = 0$ **و منه:** $Z = i\sqrt{2}$ **أو** $Z = -i\sqrt{2}$

و إما $z^2 - 2z + 2 = 0$ **و منه:** $\Delta' = (i)^2$

و بالتالي: $Z = 1 + i$ **أو** $Z = 1 - i$

4) الشكل الأسي: $Z_1 = -i\sqrt{2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi}{2}i}$ ؛ $Z_2 = i\sqrt{2} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{2}i}$

$Z_3 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{-\pi}{4}}$ ؛ $Z_4 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

5) الحساب:

لدينا:

$$\ell = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{1000} + \left(\frac{z_4}{\sqrt{2}}\right)^{1000}$$

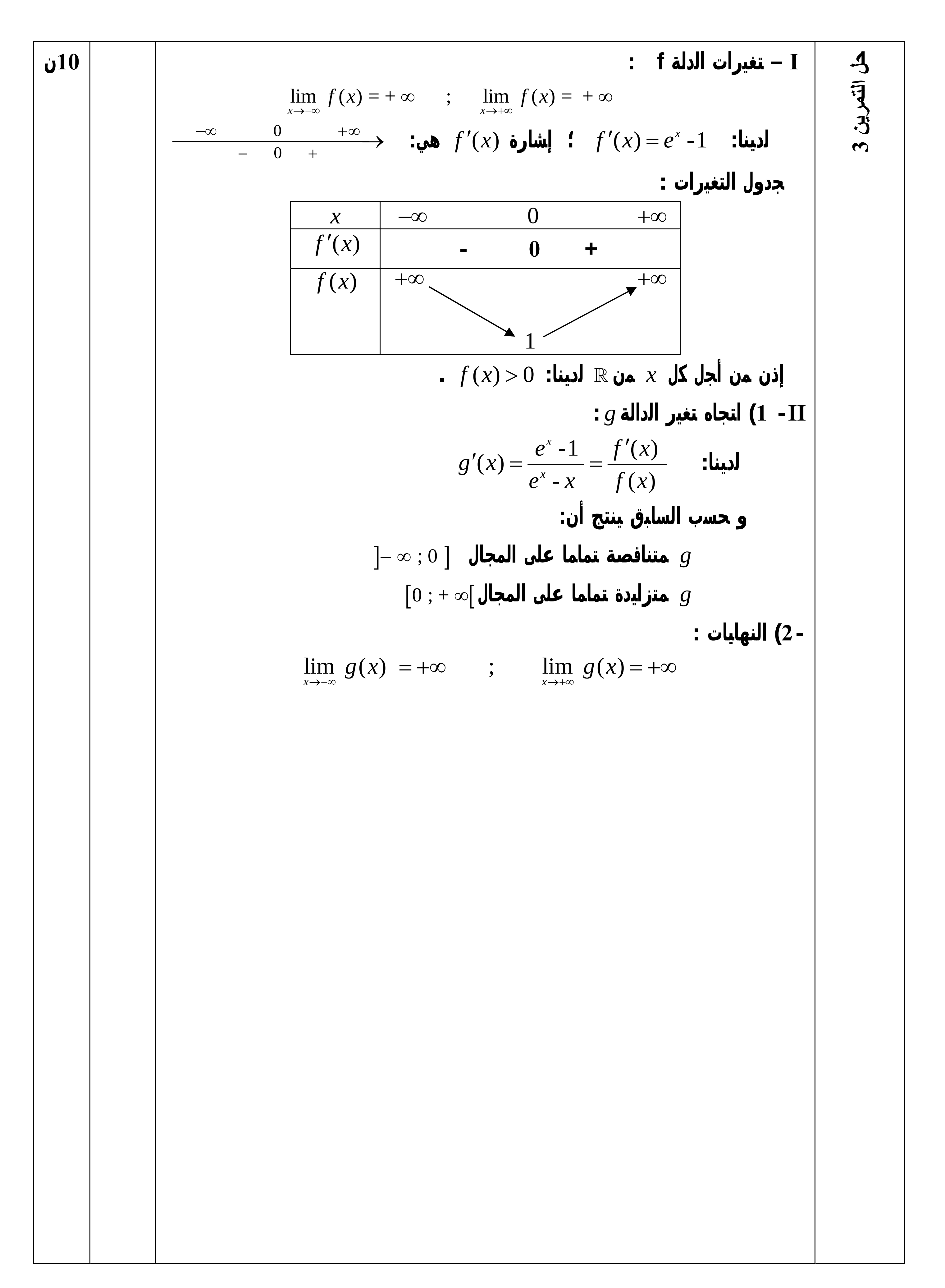
و منه:

$$\ell = \left(e^{\frac{-\pi}{2}i}\right)^{1000} + \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{1000} + \left(e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^{1000} + \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{1000}$$

و حسب موافر نجد:

$$\ell = e^{-500\pi i} + e^{500\pi i} + e^{-250\pi i} + e^{250\pi i}$$

$$\ell = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$



حل التمرين 3 — **10ن**

I – تغيرات الدلة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لدينا: $f'(x) = e^x - 1$ **؛ إشارة** $f'(x)$ **هي:**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
	$-$	0	$+$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		**-**	**0**	**+**	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

إذن من أجل كل x **من** $\mathbb{R}$ **لدينا:** $f(x) > 0$.

II - 1) اتجاه تغير الدالة g **:**

لدينا: $$g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

و حسب السابق ينتج أن:

g **متناقصة تماما على المجال** $]-\infty ; 0]$

g **متزايدة تماما على المجال** $[0 ; +\infty[$

- 2) النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

3- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4- لدينا :

$$g(x) = \ln e^{x}(1 - x e^{-x})$$
$$= \ln e^{x} + \ln(1 - x e^{-x})$$
$$= x + \ln(1 - xe^{-x})$$

و بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - x e^{-x}) = 0$

فإن: $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى في جوار $+\infty$.

5- المماس : من $g'(x) = 1$ نجد: $\dfrac{e^{x} - 1}{e^{x} - x} = 1$ و منه: $x = 1$

إذن يوجد مماس (Δ) معامل توجيهه 1 و معادلته: $y = x - 1 + \ln(e - 1)$

6- لدينا:

$$g(1) = \ln(e^{1} - 1) \quad ; \quad g(-1) = \ln(e^{-1} + 1)$$
$$g(2) = \ln(e^{2} - 2) \quad ; \quad g(-2) = \ln(e^{-2} + 2)$$

الرسم:

7- المناقشة :

لما $m < \ln(e-1) - 1$: (D) لا يقطع (C_g)

لما $m = \ln(e-1) - 1$: (D) يمس (C_g) في نقطة واحدة

لما $\ln(e-1) - 1 < m < 0$: (D) يقطع (C_g) في نقطتين

لما $m > 0$: (D) يقطع (C_g) في نقطة واحدة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	F/1

التمرين الأول : (04 نقاط)

Z مجموعة الأعداد الصحيحة .

لتكن في المجموعة Z^2 المعادلة : $5x-7y=175$ .... (1)

1) عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) حيث : $x_0{}^2+7y_0=-3$.

2) حل المعادلة (1) .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

$p(z)$ كثير حدود ذو المتغير المركب z معرف كما يلي : $p(z)=z^3-12z^2+48z-128$.

1) أ) عين العددين a و b بحيث يكون : $p(z)=(z-8)(z^2+az+b)$.

ب) حل في C المعادلة $p(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط : A ، B ، C

ذات اللواحق على الترتيب : $z_1=2-2\sqrt{3}\,i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$ و $z_3=8$.

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$.

ب) استنتج أن النقطة A صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الثالث (05 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطتين : $A(0;2;2)$ ، $B(1;4;3)$.

1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

2) حدد تقاطع (AB) مع المستوى (P) ذي المعادلة $x-3y-2z+3=0$.

3) ليكن (Q) المستوى المعرف بالمعادلة $x+2y+z=0$.

أ) بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (Q) .

ب) حدد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (Q) .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.

نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين العدد الحقيقي 2 ثم على يسار العدد الحقيقي -2 .

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3) احسب الدالة المشتقة للدالة f ثم ادرس تغيرات الدالة f .

4) بين أن $f(x)-x$ يؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $+\infty$.

5) عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

6) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل مستقيم مقارب .

7) عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) الذي معامل توجيهه $\frac{4}{3}$.

8) ارسم المنحني (C).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	(1) .... $5x-7y=175$		04 ن
	1) الحل الخاص : $\begin{cases} 5x_0-7y_0=17 \\ x_0{}^2+7y_0=-3 \end{cases}$ ومنه $x_0{}^2+5x_0-14=0$	01 ن	
	$\Delta=81$ ، $x_0=-7$ أو $x_0=2$ من أجل $x_0=-7$ يكون $7y_0=-52$ لا تقبل حلول في Z . من أجل $x_0=2$ يكون $y_0=-1$.		
	إذن الحل الخاص هو : $(x_0;y_0)=(2;-1)$	01 ن	
	2) حل المعادلة (1) : $S=\{(7k+2;5k-1)/k\in Z\}$	02 ن	
التمرين الثاني	. $p(z)=z^3-12z^2+48z-128$		05 ن
	1) أ) $p(z)=(z-8)(z^2-4z+16)$.	01.5 ن	
	ب) حلول المعادلة $p(z)=0$. $z_1=2-2\sqrt{3}i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}i$ و $z_3=8$.	01.5 ن	
	2) نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_1=2-2\sqrt{3}i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}i$ و $z_3=8$. أ) كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ على الشكل الأسي:		
	. $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$	01 ن	
	ب) الاستنتاج : $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ معناه $(z_1-z_3)=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_3)$	01 ن	

التمرين	الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الثالث	وهذا يعني أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$.		**05 ن**
	$A(0;2;2)$ ، $B(1;4;3)$.		
	1) تمثيل وسيطي للمستقيم (AB): $(AB):\begin{cases} x=t \\ y=t+2 \\ z=t+2 \end{cases} \quad ;t\in R$	**02 ن**	
	2) تقاطع (AB) مع المستوى (P) ذي المعادلة $x-3y-2z+3=0$.		
	نحل الجملة : $\begin{cases} x=t..............(1) \\ y=t+2..............(2) \\ z=t+2..............(3) \\ x-3y-2z+3=0.......(4) \end{cases}$	**02 ن**	
	بتعويض (1) و(2) و(3) في (4) نجد $t=-\frac{7}{4}$		
	ومنه (AB) يقطع (P) في النقطة $H\left(-\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$	**01 ن**	
التمرين الرابع	$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.		**06 ن**
	1) قابلية اشتقاق الدالة f على يمين العدد الحقيقي 2:		
	$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right)=+\infty$	**0.5 ن**	
	نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين العدد الحقيقي 2.		
	قابلية اشتقاق الدالة f على يسار العدد الحقيقي -2:		
	$\lim_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)=-\infty$	**0.5 ن**	
	نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار العدد الحقيقي -2 .		
	2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}}\right)=0$	**0.25 ن**	
	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)=+\infty$	**0.25 ن**	
	3) $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$	**0.5 ن**	

دراسة تغيرات الدالة f : — 0.5 ن

إشارة $f'(x)$

جدول التغيرات : — 0.5 ن

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$0 \searrow -1$			$1 \nearrow +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}\right)=0$ — 0.5 ن

5) المستقيمات المقاربة للمنحني (C): — 0.25 ن

$(d): y=0$ مستقيم مقارب أفقي عند $-\infty$. — 0.25 ن

$(d'): y=x$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

6) وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل مستقيم مقارب . — 0.5 ن

(C) يقع تحت (d) وتحت (d') .

7) $f'(x)=\frac{4}{3}$ تكافئ $x=\frac{5}{2}$ ومنه معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) الذي — 0.5 ن

معامل توجيهه $\frac{4}{3}$ هي : $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

8) رسم المنحني (C). — 01 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	V/2

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) أوجد مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث : $5x \equiv 12[13]$.

2) حل في Z^2 المعادلة $5x-13y=12$.

3) n عدد طبيعي يكتب $\overline{3\alpha 0\alpha 2}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 ويكتب $\overline{5\beta 6\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7.

أوجد قيمة كل من α وβ ثـم استنتج قيمة n .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

$p(z)$ كثير حدود ذو المتغير المركب z معرف كما يلي : $p(z)=z^3-12z^2+48z-128$.

1) أ) عين العددين a و b بحيث يكون : $p(z)=(z-8)(z^2+az+b)$.

ب) حل في C المعادلة $p(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط : A ، B ، C

ذات اللواحق على الترتيب : $z_1=2-2\sqrt{3}\,i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$ و $z_3=8$.

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$.

ب) استنتج أن النقطة A صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;2;-3)$ ، $B(-3;1;4)$ ، $C(2;6;-1)$.

1) برهن أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا.

2) تحقق من أن معادلة المستوي (ABC) هي : $2x-y+z+3=0$.

3) I نقطة إحداثياتها $(-5;9;4)$، أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) الذي يشمل I والعمودي على المستوي (ABC) .

4) أوجد إحداثيات النقطة J تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC) .

5) استنتج المسافة بين النقطة I و المستوي (ABC) .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.

نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين العدد الحقيقي 2 ثم على يسار العدد الحقيقي -2 .

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3) احسب الدالة المشتقة للدالة f ثم ادرس تغيرات الدالة f .

4) بين أن $f(x)-x$ يؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $+\infty$.

5) عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

6) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل مستقيم مقارب .

7) عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) الذي معامل توجيهه $\frac{4}{3}$.

8) ارسم المنحني (C).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجـابة	العلامـــة مجزأة	العلامـــة كاملة
التمرين الأول	1) $5x \equiv 12[13]$ تكافئ $x \equiv 5[13]$ ومنه $x = 13k+5 \ / k \in Z$.	01 ن	04 ن
	2) حلول المعادلة $5x - 13y = 12$: $\{(13k+5; 5k+1)/k \in Z\}$	01 ن	
	3) $\begin{cases} n = 3\times 625 + 125\alpha + 5\alpha + 2 \\ n = 1715 + 49\beta + 42 + \beta \\ 0 \le \alpha \prec 5 \text{ و } 0 \le \beta \prec 7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} n = 1877 + 130\alpha \\ n = 1757 + 50\beta \\ 0 \le \alpha \prec 5 \text{ و } 0 \le \beta \prec 7 \end{cases}$	01 ن	
	ومنه $\begin{cases} 50\beta - 130\alpha = 120 \\ 0 \le \alpha \prec 5 \text{ و } 0 \le \beta \prec 7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 5\beta - 13\alpha = 12 \\ 0 \le \alpha \prec 5 \text{ و } 0 \le \beta \prec 7 \end{cases}$	0.5 ن	
	ومنه $\begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha = 1 \end{cases}$	0.5 ن	
	وتكون قيمة n هي : $n = 2007$.		
التمرين الثاني	$p(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.	01.5 ن	05 ن
	1) أ) $p(z) = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$.		
	ب) حلول المعادلة $p(z) = 0$. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ و $z_3 = 8$.	01.5 ن	
	2) نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ و $z_3 = 8$.		
	أ) كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ على الشكل الأسي : $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$.	01 ن	
	ب) الاستنتاج : $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ معناه $(z_1 - z_3) = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_3)$	01 ن	
	وهذا يعني أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$.		

التمرين الثالث	. $C(2;6;-1)$ ، $B(-3;1;4)$ ، $A(1;2;-3)$		**05 ن**
	1) $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$ و $\overrightarrow{AB}(1;4;2)$ غير مرتبطان خطيا	**01 ن**	
	إذن النقط A ، B و C تعرف مستويا.	**01 ن**	
	2) التحقق من أن معادلة المستوي (ABC) هي : $2x-y+z+3=0$.		
	3) I نقطة إحداثياتها $(-5;9;4)$، المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) الذي يشمل I والعمودي على المستوي (ABC) هي : $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=9-t \quad ;t\in R \\ z=4+t \end{cases}$	**01 ن**	
	4) إحداثيات النقطة J تقاطع (Δ) و (ABC) هي: $J(-1;7;6)$	**01 ن**	
	5) المسافة بين I و (ABC) هي: $IJ=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$.	**01 ن**	
التمرين الرابع	. $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$		**06 ن**
	1) قابلية اشتقاق الدالة f على يمين العدد الحقيقي 2: $\lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \xrightarrow{\succ} 2} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right)=+\infty$	**0.5 ن**	
	نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين العدد الحقيقي 2.		
	قابلية اشتقاق الدالة f على يسار العدد الحقيقي -2: $\lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \xrightarrow{\prec} -2} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)=-\infty$	**0.5 ن**	
	نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار العدد الحقيقي -2 .		
	2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}}\right)=0$	**0.25 ن**	
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)=+\infty$	**0.25 ن**	
	3) $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$	**0.5 ن**	

	دراسة تغيرات الدالة f :	0.5 ن	
	إشارة $f'(x)$		
	جدول التغيرات :	0.5 ن	
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}\right)=0$ (4	0.5 ن	
	5) المستقيمات المقاربة للمنحني (C):	0.25 ن	
	$(d): y=0$ مستقيم مقارب أفقي عند $-\infty$.	0.25 ن	
	$(d'): y=x$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.		
	6) وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى كل مستقيم مقارب .	0.5 ن	
	(C) يقع تحت (d) وتحت (d') .		
	7) $f'(x)=\frac{4}{3}$ تكافئ $x=\frac{5}{2}$ ومنه معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) الذي معامل توجيهه $\frac{4}{3}$ هي : $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$	0.5 ن	
	8) رسم المنحني (C).	01 ن	

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	0 ↘ -1			1 ↗ $+\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	**المادة : رياضيات**	**التوقيت: 8 سا - 10 سا**	**M/3**

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 ، ثم استنتج باقي قسمة العدد A على7 حيث :

$A = 5^{2010} + 2011$

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد : $222^n + 3\times 5^n + 97$ قابلا القسمة على 7 .

3) B عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في النظام ذو الأساس 10 كما يلي : $B = 20xx$.

عين x بحيث يكون : $B \equiv 2[7]$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

$p(z)$ كثير حدود ذو المتغير المركب z معرف كما يلي : $p(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.

1) أ) عين العددين a و b بحيث يكون : $p(z) = (z-8)(z^2 + az + b)$.

ب) حل في C المعادلة $p(z) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط : A ، B ، C

ذات اللواحق على الترتيب : $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ و $z_3 = 8$.

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

ب) استنتج أن النقطة A صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الثالث : (05نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(-2;1;0)$ ، $C(1;-1;4)$

1) حدد طبيعة المثلث ABC .

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(2;13;5)$ هو ناظمي للمستوي (ABC)ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) عين إحداثي النقطة H المسقط العمودي لمبدأ المعلم O على المستوي (ABC)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على R كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين .

3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

4) أوجد إحداثي النقطة A من (C_f) التي يكون معامل توجيه المماس لـ (C_f) فيها مساويا $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) أرسم المنحنى (C_f) .

6) g دالة عددية معرفة على R بالعلاقة : $g(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}$.

بين أن g دالة زوجية ، وارسم المنحنى (C_g) الممثل لها في المستوي .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	1) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 :		04 ن
	$5^{6k} \equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1} \equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2} \equiv 4[7]$ ، $5^{6k+3} \equiv 6[7]$ ،	01.5 ن	
	$5^{6k+4} \equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5} \equiv 3[7]$.		
	استنتاج باقي قسمة العدد A على7 :		
	$A = 5^{2010} + 2011 = 5^{6\times 335} + 2011 \equiv 1 + 2[7]$	0.5 ن	
	أي باقي قسمة العدد A على7 هو 3 .		
	2) $222^n + 3\times 5^n + 97 \equiv 0[7]$ تكافئ $5^n + 3\times 5^n + 6 \equiv 0[7]$	01 ن	
	أي $4\times 5^n \equiv 1[7]$ ومنه $5^n \equiv 2[7]$ أي $n = 6k + 4 \quad / k \in N$.		
	3) $B = 11x + 2000$ و $0 \le x \prec 10$.		
	$B \equiv 2[7]$ تكافئ $11x + 2000 \equiv 2[7]$ و $0 \le x \prec 10$ أي	01 ن	
	$x \equiv 1[7]$ و $0 \le x \prec 10$ ومنه $x = 1$ أو $x = 8$.		
التمرين الثاني	$p(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$.	01.5 ن	05 ن
	1) أ) $p(z) = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$.		
	ب) حلول المعادلة $p(z) = 0$.	01.5 ن	
	$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ و $z_3 = 8$.		
	2) نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب :		
	$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ و $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ و $z_3 = 8$.		
	أ) كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ على الشكل الأسي:	01 ن	
	$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$.		
	ب) الاستنتاج : $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ معناه $(z_1 - z_3) = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_3)$	01 ن	
	وهذا يعني أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$.		

التمرين الثالث — 05 ن

$A(2;0;1)$ ، $B(-2;1;0)$ ، $C(1;-1;4)$

1) طبيعة المثاث ABC . — 01.5 ن

$AB=3\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{11}$ و $BC=\sqrt{29}$

لدينا $BC^2=AB^2+AC^2$ إذن المثاث ABC قائم في A . — 01 ن

2) الشعاع $\vec{n}(2;13;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) لأن :

$\vec{n}(2;13;5)\perp\overrightarrow{AB}(-4;1;-1)$ و $\vec{n}(2;13;5)\perp\overrightarrow{AC}(-1;-1;3)$ — 0.5 ن

معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+13y+5z-9=0$.

3) النقطة H المسقط العمودي لمبدأ المعلم O على المستوي (ABC) هي

تقاطع المستوي (ABC) مع المستقيم الذي يش1مل O وشعاع توجيهه $\vec{n}$.

أي حل الجملة — 02 ن

$$\begin{cases}(1)......x=2t\\(2)......y=13t\\(3)......z=5t\\(4)......2x+13y+5z-9=0\end{cases}$$

بتعويض (1) و(2) و(3) في(4) نجد $t=\dfrac{9}{198}$

ومنه $H\left(\dfrac{18}{198};\dfrac{117}{198};\dfrac{45}{198}\right)$

التمرين الرابع — 06 ن

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ — 0.5 ن

1) دراسة تغيرات الدالة f :

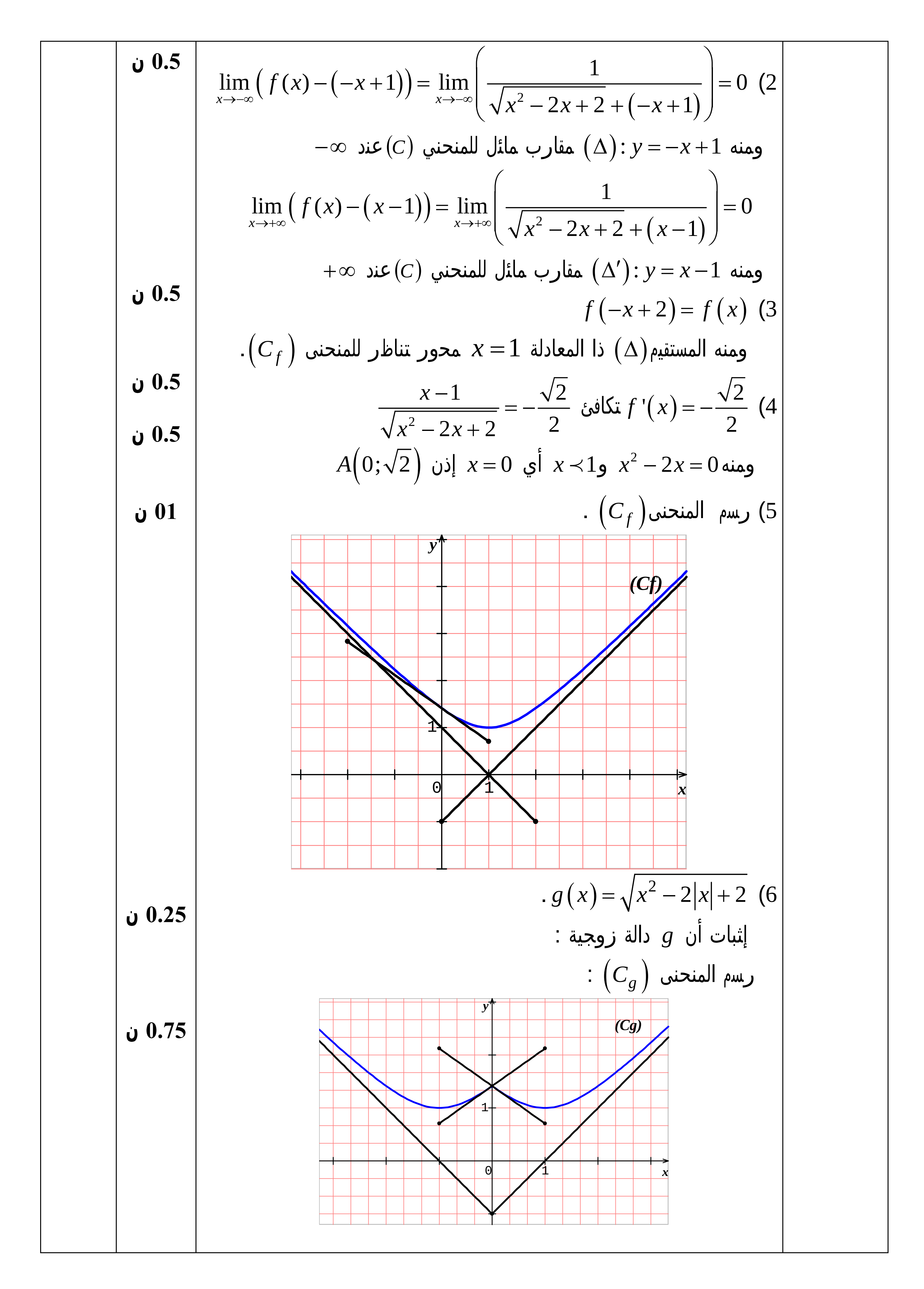
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$ — 0.5 ن

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ — 0.5 ن

إشارة $f'(x)$

جدول التغيرات : — 0.5 ن

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



2) $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+(-x+1)}\right)=0$ — 0.5 ن

ومنه $(\Delta): y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)}\right)=0$

ومنه $(\Delta'): y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ — 0.5 ن

3) $f(-x+2)=f(x)$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f). — 0.5 ن

4) $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — 0.5 ن

ومنه $x^2-2x=0$ و $x\prec 1$ أي $x=0$ إذن $A\left(0;\sqrt{2}\right)$

5) رسم المنحنى (C_f) . — 01 ن

6) $g(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}$.

إثبات أن g دالة زوجية : — 0.25 ن

رسم المنحنى (C_g) : — 0.75 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	**المادة : رياضيات**	**التوقيت: 8 سا - 10 سا**	**H/4**

التمرين الأول : (04 نقاط)

n عدد طبيعي يكتب $\overline{4231x}$ في الأساس 6 . عين العدد الطبيعي x في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) n يقبل القسمة على 4 .

2) n يقبل القسمة على 5 .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{9}{4}$.

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2u_n - 9$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ثم v_0 ، v_1 ، v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

4) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

التمرين الثالث : (05نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(-2;1;0)$ ، $C(1;-1;4)$

1) حدد طبيعة المثلث ABC .

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(2;13;5)$ هو ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) عين احداثي النقطة H المسقط العمودي لمبدأ المعلم O على المستوي (ABC)

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + x + 2$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة $4cm$).

1) أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب للمنحنى (C).

جـ) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D)

2) أ) احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن : $f'(x)=(2e^x-1)(e^x-1)$.

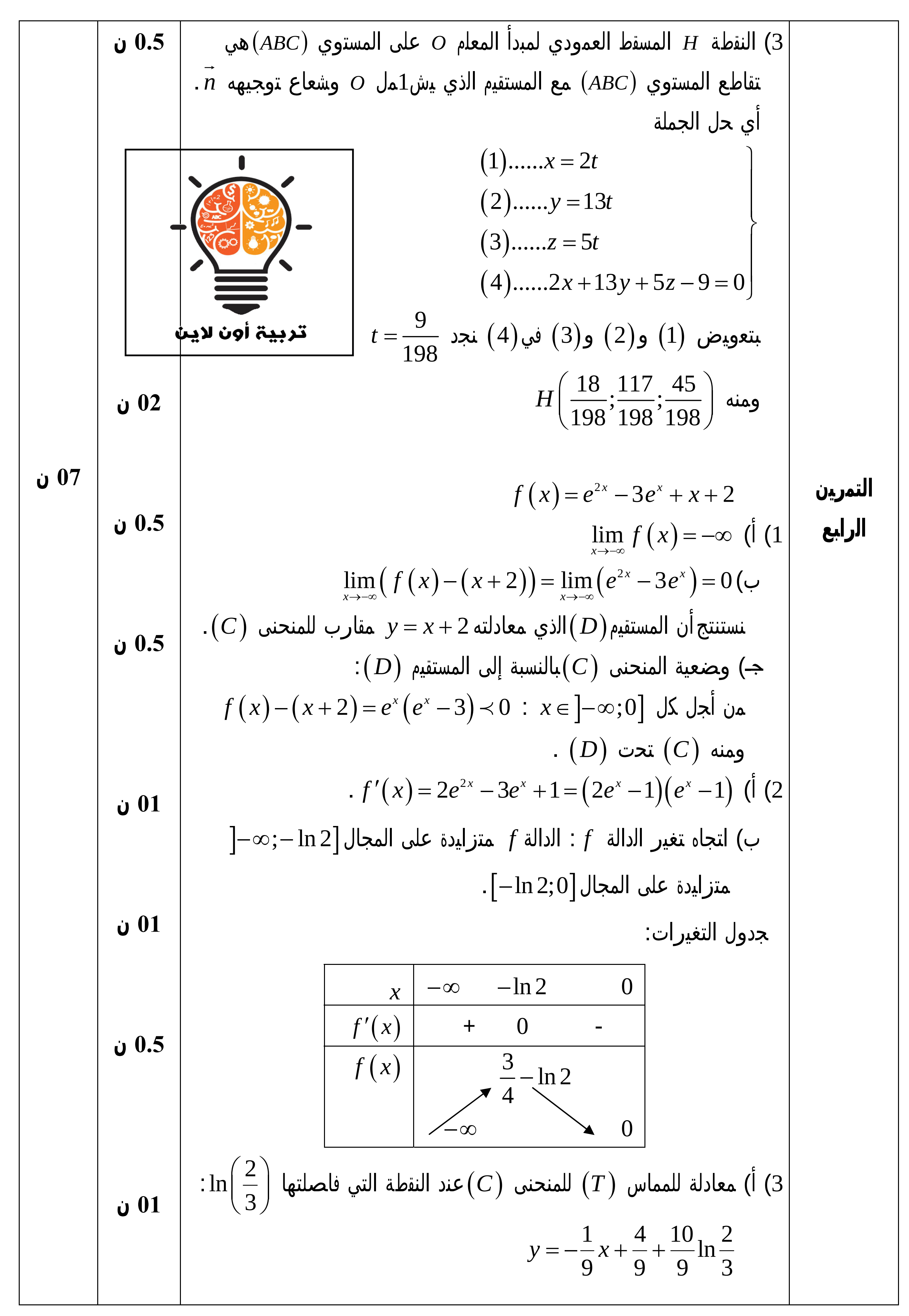
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) أ) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

ب) أنشئ (T) و (D) و (C).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011		
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات		**المادة : رياضيات**

محاور الموضوع	عناصـر الإجـابة	العلامـ ـ ـة مجزأة	العلامـ ـ ـة كاملة
التمرين الأول	$n = x+6+3\times 6^2+2\times 6^3+2\times 6^4 = x+3138$ مع $x \prec 6$	01 ن	04 ن
	1) n يقبل القسمة على 4 تكافئ $x+3138 \equiv 0[4]$ و $x \prec 6$ ومنه $x \equiv 2[4]$ و $x \prec 6$ أي $x=2$.	01.5 ن	
	2) n يقبل القسمة على 5 . n يقبل القسمة على 5 تكافئ $x+3138 \equiv 0[5]$ و $x \prec 6$ ومنه $x \equiv 2[5]$ و $x \prec 6$ أي $x=2$.	01.5 ن	
التمرين الثاني	(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{9}{4}$. و $v_n = 2u_n - 9$.		04 ن
	1) $u_1 = \frac{13}{4}$ ، $u_2 = \frac{31}{8}$ و $v_0 = -5$ ، $v_1 = -\frac{5}{2}$ ، $v_2 = -\frac{5}{4}$.	1.25 ن	
	2) $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.	1.25 ن	
	3) عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = -5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.75 ن	
	4) عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{9}{2} = -5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{9}{2}$	0.75 ن	
التمرين الثالث	$A(2;0;1)$ ، $B(-2;1;0)$ ، $C(1;-1;4)$		05 ن
	1) طبيعة المثلث ABC . $AB = 3\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{11}$ و $BC = \sqrt{29}$ لدينا $BC^2 = AB^2 + AC^2$ إذن المثلث ABC قائم في A .	01.5 ن	
	2) الشعاع $\vec{n}(2;13;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) لأن : $\vec{n}(2;13;5) \perp \overrightarrow{AB}(-4;1;-1)$ و $\vec{n}(2;13;5) \perp \overrightarrow{AC}(-1;-1;3)$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+13y+5z-9=0$.	01 ن	



التمرين الرابع — 07 ن

3) النقطة H المسقط العمودي لمبدأ المعلم O على المستوي (ABC) هي تقاطع المستوي (ABC) مع المستقيم الذي يشمل O وشعاع توجيهه $\vec{n}$. أي حل الجملة — 0.5 ن

$$\begin{cases}(1)......x=2t\\(2)......y=13t\\(3)......z=5t\\(4)......2x+13y+5z-9=0\end{cases}$$

تربية أون لاين

بتعويض (1) و(2) و(3) في (4) نجد $t=\dfrac{9}{198}$

ومنه $H\left(\dfrac{18}{198};\dfrac{117}{198};\dfrac{45}{198}\right)$ — 02 ن

$f(x)=e^{2x}-3e^{x}+x+2$

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ — 0.5 ن

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-3e^{x}\right)=0$

نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C). — 0.5 ن

جـ) وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D):

من أجل كل $x\in]-\infty;0]$: $f(x)-(x+2)=e^{x}(e^{x}-3)\prec 0$

ومنه (C) تحت (D) . — 01 ن

2) أ) $f'(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1=(2e^{x}-1)(e^{x}-1)$. — 01 ن

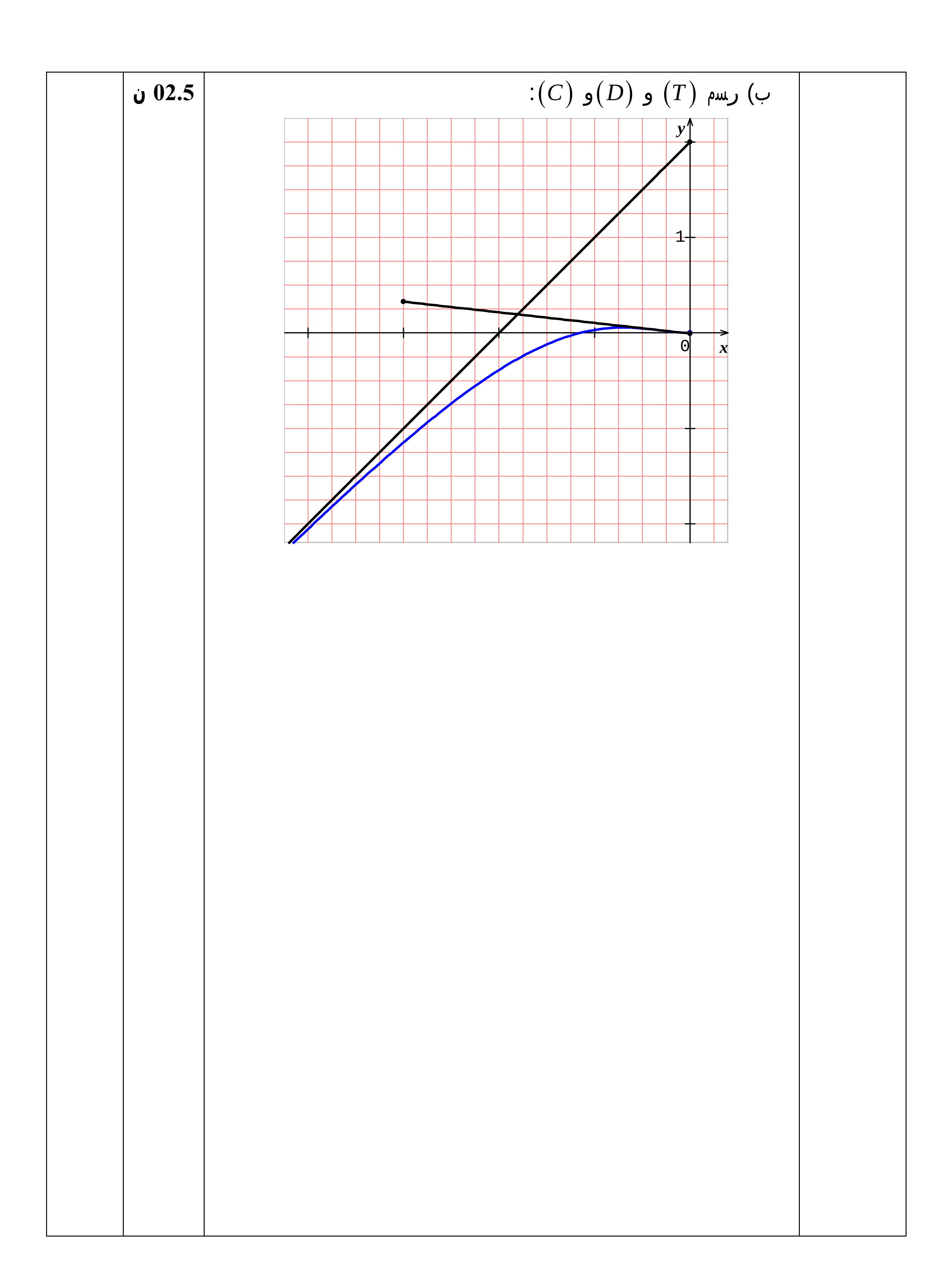
ب) اتجاه تغير الدالة f : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-\ln 2]$ متزايدة على المجال $[-\ln 2;0]$.

جدول التغيرات: — 0.5 ن

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{4}-\ln 2$	↘	0

3) أ) معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$: — 01 ن

$$y=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}+\frac{10}{9}\ln\frac{2}{3}$$

	ب) رسم (T) و (D)و (C): 		02.5 ن	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية			الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	E/5

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

2) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $3+26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}$ يقبل القسمة على 7

3) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $5n+26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}$ قابل للقسمة على 7

التمرين الثاني : (04 نقاط)

أ) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n=e^{\frac{1}{3}+2n}$.

1) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أحسب المجموع : $S=u_0+u_1+.....+u_n$.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S=\dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$

ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n=\ln(u_n)$

1) ما طبيعة المتتالية (v_n) ؟ .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $S'=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$.

عين العدد الطبيعي n علما أن : $S'=\dfrac{176}{3}$

التمرين الثالث : (04.5 نقطة)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1) بين أن (S) كرة مركزها $\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2) أ- تحقق أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S).

ب- أكتب معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A.

التمرين الرابع : (07.5 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$.

نسمي (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس .

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ وفسر النتيجة بيانيا .

3) أ) أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f ثم أدرس تغيراتها على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) استنتج أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α و أن $-0,57 \prec \alpha \prec -0,56$

جـ) حدد إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

4) أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب) أرسم المنحنى (C) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية — **الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات — **المادة : رياضيات**

محاور الموضوع	عناصـر الإجـابة	العلامـة مجزأة	العلامـة كاملة
التمرين الأول	1) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 : $5^{6k}\equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2}\equiv 4[7]$ ، $5^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6k+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5}\equiv 3[7]$.	01.5 ن	04 ن
	2) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 5^{6n+5}+2\times\left(5^{6n+1}\right)^2+3[7]$ $\equiv 3+2\times 4+3[7]$ $\equiv 0[7]$	01 ن	
	3) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$ تكافئ $11+5n\equiv 0[7]$ أي $5n\equiv 3[7]$ ومنه $n\equiv 2[7]$ أي $n=7k+2 \quad / k\in N$.	01.5 ن	
التمرين الثاني	أ) $u_n=e^{\frac{1}{3}+2n}$. 1) $u_{n+1}=e^2u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^2 وحدها الأول $u_0=e^{\frac{1}{3}}$.	01 ن	04 ن
	2) $S=u_0+u_1+.....+u_n=e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}\right)$.	0.5 ن	
	3) $S=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$ يكافئ $2n+2=10$ ومنه $n=4$	0.5 ن	
	ب) $v_n=\ln(u_n)$ 1) $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln(e^2u_n)=2+\ln(u_n)=2+v_n$ ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=\frac{1}{3}$.	01 ن	
	2) $S'=v_0+v_1+v_2+.....+v_n=\frac{n+1}{2}\left(\frac{2}{3}+2n\right)=\frac{(n+1)(3n+1)}{3}$	0.5 ن	
	$S'=\frac{176}{3}$ يكافئ $(n+1)(3n+1)=176$ ومنه $n=7$	0.5 ن	

العلامة الكاملة	العلامة المجزأة	عناصر الإجابة	المحاور
04.5 ن	02 ن 01 ن 01.5 ن	1) $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$ تكافئ $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ ومنه (S) سطح كرة مركزها $\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$. 2) أ) التحقق من أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S). ب) معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A هي: $x+y-z=0$	التمرين الثالث
07.5 ن	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن	$f(x)=x-(x+1)e^{-x}$ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-xe^{-x}-e^{-x}\right)=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)=0$ التفسير البياني : (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=x$. 3) أ) $f'(x)=1+xe^{-x}\succ 0$ تغيرات الدالة f' على المجال $[-1;+\infty[$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{-x}\right)=1$ $f''(x)=(1-x)e^{-x}$ إشارة $f''(x)$ جدول تغيرات الدالة f' : (جدول 1 أدناه) ب) المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α حيث $-0{,}57\prec\alpha\prec-0{,}56$ (مبرهنة القيم المتوسطة). جـ) إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$. (جدول 2 أدناه)	التمرين الرابع

جدول 1:

x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	
$f'(x)$	$1-e$	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

جدول 2:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

4) أ) جدول تغيرات الدالة f : **0.5 ن**

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) رسم المنحنى (C) **02 ن**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	**المادة : رياضيات**	**التوقيت: 8 سا - 10 سا**	**B/6**

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) حل في Z^2 المعادلة: $6x-7y=22$.

2) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{13\alpha\beta}$ ويكتب في نظام العد الذي أساسه 8 على الشكل $\overline{10\beta\alpha}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) (U_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة على N بـ $\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$.

أ) برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n \succ 1$.

ب) أدرس اتجاه تغير (U_n) و استنتج انها متقاربة .

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على N بـ : $V_n = \ln(U_n)$.

أ) اثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الاول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n.

جـ) احسب نهاية المتتالية (U_n) .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1) بين أن (S) سطح كرة مركزها $\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2) أ) تحقق أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S).

ب) أكتب معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f دالة عددية معرفة على R كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) بين أن المستقيم $(\Delta): y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وأن المستقيم $(\Delta'): y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

4) أوجد إحداثي النقطة A من (C_f) التي يكون معامل توجيه المماس لـ (C_f) فيها مساويا $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) أرسم المنحنى (C_f) .

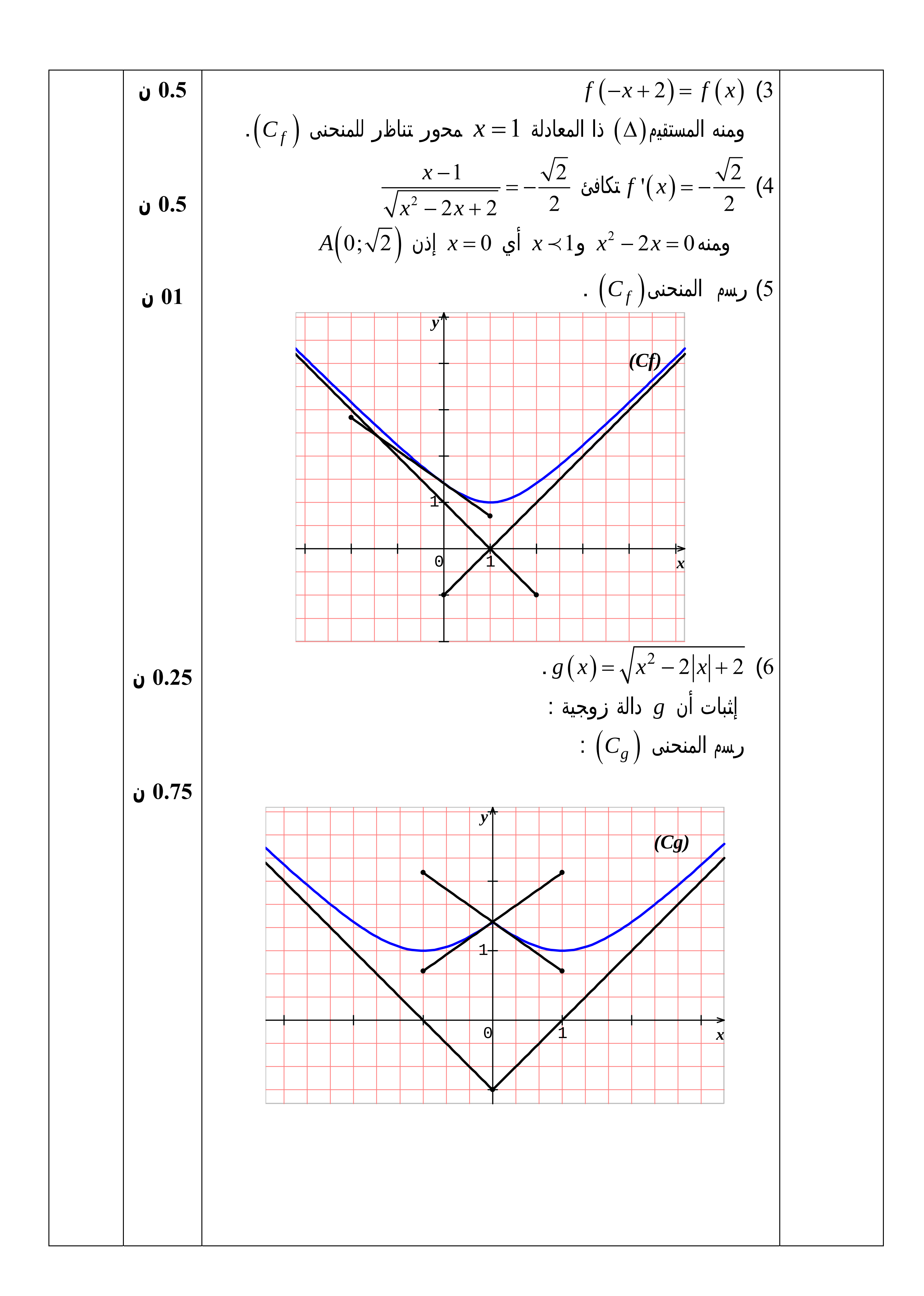
6) g دالة عددية معرفة على R بالعلاقة : $g(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}$.

بين أن g دالة زوجية ، وارسم المنحنى (C_g) الممثل لها في المستوي .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات — المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	1) حلول المعادلة: $6x-7y=22$. $S=\{(7k+6;6k+2)/k\in Z\}$	01.5 ن	04 ن
	2) $\begin{cases} n=7^3+3\times7^2+7\alpha+\beta \\ n=8^3+8\beta+\alpha \\ 0\le\alpha\le7 \text{ و } 0\le\beta\le7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} n=490+7\alpha+\beta \\ n=512+8\beta+\alpha \\ 0\le\alpha\le7 \text{ و } 0\le\beta\le7 \end{cases}$	02 ن	
	ومنه $\begin{cases} 6\alpha-7\beta=22 \\ 0\le\alpha\le7 \text{ و } 0\le\beta\le7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=2 \end{cases}$ ويكون $n=534$.	0.5 ن	
التمرين الثاني	1) $\begin{cases} U_0=e \\ U_{n+1}=\sqrt{U_n} \end{cases}$.		05 ن
	أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ1$. من أجل $n=0$ لدينا $u_0\succ1$ لأن $u_0=e$. نفرض أن $u_n\succ1$ ونبرهن أن $u_{n+1}\succ1$ لدينا $u_n\succ1$ ومنه $\sqrt{u_n}\succ1$ وبالتالي $u_{n+1}\succ1$ إذن لكل $n\in N$: $u_n\succ1$.	01 ن	
	ب) دراسة اتجاه تغير (U_n) . $u_{n+1}^2-u_n^2=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)\le0$ ومنه (u_n) متناقصة. استنتاج تقارب (U_n) : بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.	01 ن	
	2) $V_n=\ln(U_n)$.	0.5 ن	
	أ) $V_{n+1}=\ln(U_{n+1})=\frac{1}{2}\ln(U_n)=\frac{1}{2}V_n$ إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=1$.	01 ن	

	01 ن	ب) عبارة V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n: $V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $U_n=e^{V_n}=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$	
	0.5 ن	جـ) حساب نهاية المتتالية (U_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$	
05 ن	02.5 ن 01 ن	1) $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$ تكافئ $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ ومنه (S) سطح كرة مركزها $\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.	التمرين الثالث
	01.5 ن	2) أ) التحقق من أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S). ب) معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A هي: $x+y-z=0$	
06 ن		$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$	التمرين الرابع
	0.5 ن	1) دراسة تغيرات الدالة f : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}=+\infty$	
	0.5 ن	$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$	
	0.5 ن	إشارة $f'(x)$ جدول التغيرات :	
	0.5 ن	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	
	0.5 ن	2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+(-x+1)}\right)=0$ ومنه $(\Delta): y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$	
	0.5 ن	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)}\right)=0$ ومنه $(\Delta'): y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$	



0.5 ن

3) $f(-x+2)=f(x)$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

0.5 ن

4) $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $x^2-2x=0$ و $x\prec 1$ أي $x=0$ إذن $A(0;\sqrt{2})$

01 ن

5) رسم المنحنى (C_f).

0.25 ن

6) $g(x)=\sqrt{x^2-2|x|+2}$.

إثبات أن g دالة زوجية :

0.75 ن

رسم المنحنى (C_g) :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	U/36

التمرين الأول : (4 نقاط)

تركيز مركب كيميائي في محلول حمضي يتراوح بين $0,3 mg/L$ و $0,9 mg/L$.

الجهاز الذي يقيس هذا التركيز في كمية من محلول غير مضبوط فهو يعطي قيمة عشوائية بين 0 و 1 .

تمت نمذجة النتائج التي أعطاها هذا الجهاز بواسطة متغير عشوائي يتبع القانون المنتظم على المجال $[0 ; 1]$.

- ما هو احتمال أن يعطي الجهاز نتيجة محصورة بين $0,4 mg/L$ و $0,6 mg/L$ ؟

التمرين الثاني : (6 نقاط)

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $U_0 = 2$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $3U_{n+1} = U_n + 9$

1- احسب : U_1 , U_2 , U_3 .

2- لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل : $V_n = U_n - \frac{9}{2}$

بين أن (V_n) متتالية هندسية ثم احسب المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$.

3- (W_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $W_n = U_n + k$

عين k حتى تكون (W_n) متتالية هندسية .

التمرين الثالث : (10 نقاط)

1) لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بالعبارة : $f(x) = e^x - e^{2x}$.

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C) . عين إشارة $f(x)$.

2) لتكن g دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بالعبارة: $g(x) = \ell n|e^x - e^{2x}|$. تمثيلها البياني (Γ) .

أ- احسب $g'(x)$ معينا إشارتها باستعمال إشارة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

3) بين أن : $g(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$ من أجل $x > 0$

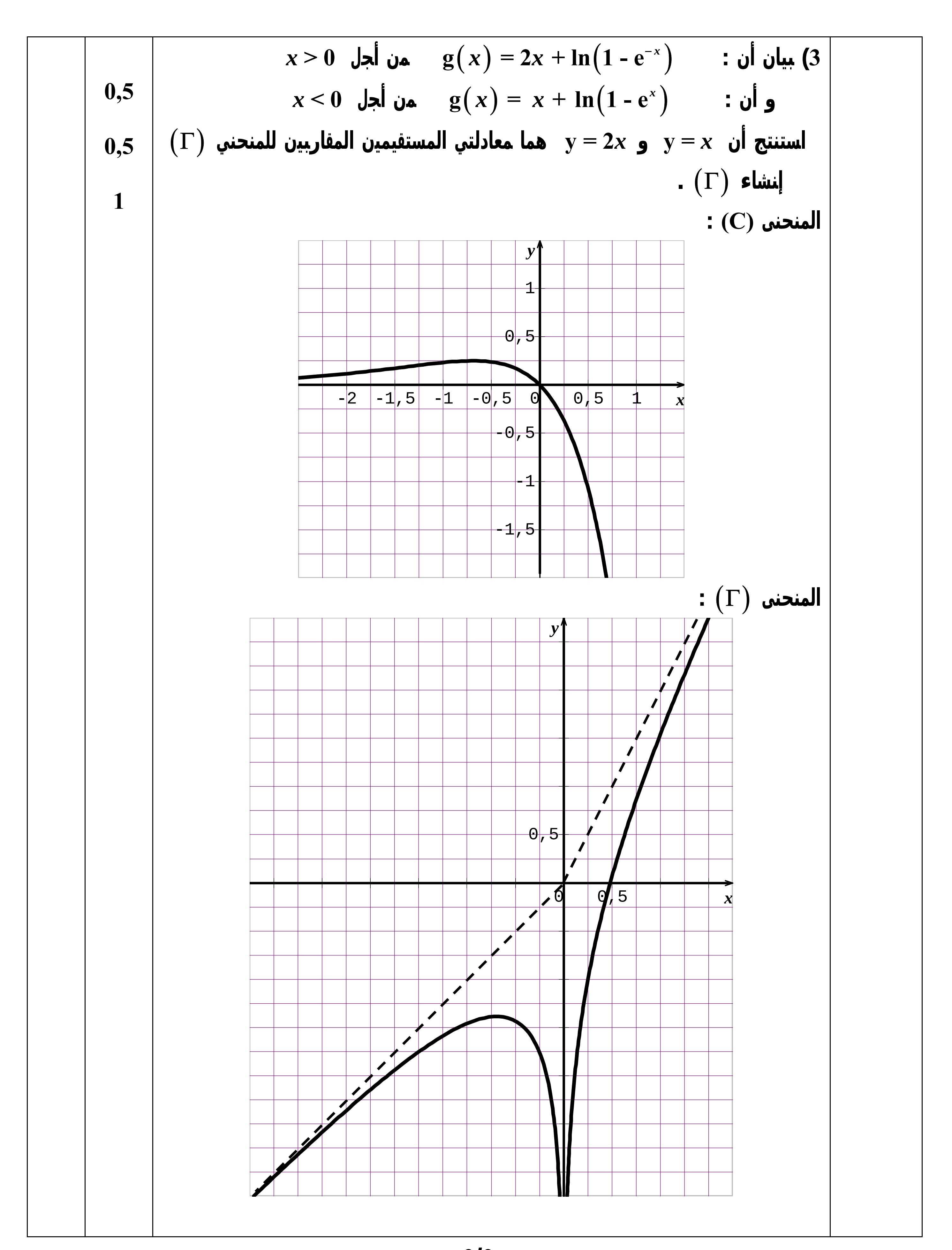
و أن : $g(x) = x + \ln(1 - e^x)$ من أجل $x < 0$

استنتج أن $y = x$ و $y = 2x$ هما معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحني (Γ) .

أنشئ (Γ) في معلم آخر .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة : 3 ثانوي رياضيات	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابـة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	بما أن المتغير العشوائي الذي تمت به نمذجة النتائج يتبع القانون المنتظم على المجال $[0\,;1]$ فإن الاحتمال هو : $P=\int_{0,4}^{0,6} f(x)dx$ حيث : $f(x)=1$	2	4 ن
	و منه : $P=\int_{0,4}^{0,6} 1.dx$ إذن : $P=[x]_{0,4}^{0,6}=0,6-0,4=0,2$	2	
حل التمرين 2	1 – حساب $U_1\,;U_2\,;U_3$: $U_1=\frac{11}{3}$ ؛ $U_2=\frac{38}{9}$ ؛ $U_3=\frac{119}{27}$	1,5	6 ن
	2 – إثبات أن (V_n) متتالية هندسية : لدينا : $V_{n+1}=\frac{1}{3}V_n$	1	
	و عليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0=\frac{-5}{2}$	1	
	حساب S_n حيث : $S_n=U_1+U_2+...+U_n$ لدينا : $S_n=V_1+V_2+...+V_n+\frac{9}{2}n$ إذن : $S_n=\frac{-5}{4}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+\frac{9}{2}n$	1,5	
	3 – تعيين k : تكون (W_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : $W_{n+1}=W_n\times\beta$ و هذا يتحقق من أجل $k=\frac{9}{2}$.	1	
حل التمرين 3	1) - ادرس تغيرات الدالة f .	2	8 ن
	- إنشاء (C) .	1	
	- تعيين إشارة $f(x)$.	0,5	
	2) أ- حساب $g'(x)$ معينا إشارتها	1	
	ب- دراسة تغيرات الدالة g .	1,5	



3) بيان أن : $g(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$ من أجل $x > 0$

و أن : $g(x) = x + \ln(1 - e^{x})$ من أجل $x < 0$ **0,5**

استنتج أن $y = x$ و $y = 2x$ هما معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحني (Γ) **0,5**

إنشاء (Γ) . **1**

المنحنى (C) :

المنحنى (Γ) :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2011		

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	K/1

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)$. بين أن f متزايدة تماما .

2) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_0=e$ و $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$.

3) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم حدد إشارة $g(x)$.

استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

$p(z)$ كثير حدود ذو المتغير المركب z معرف كما يلي : $p(z)=z^3-12z^2+48z-128$.

1) أ) عين العددين a و b بحيث يكون : $p(z)=(z-8)(z^2+az+b)$.

ب) حل في C المعادلة $p(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_1=2-2\sqrt{3}\,i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$ و $z_3=8$.

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$.

ب) استنتج أن النقطة A صورة النقطة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط : $A(2,4,1)$ ، $B(0,4,-3)$ ، $C(3,1,-3)$ ، $D(1,0,-2)$ ، $E(3,2,-1)$ ، $I\left(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5}\right)$.

أجب بصحيح أو خطأ عن العبارات التالية مع التعليل .

1) للمستوي (ABC) معادلة من الشكل : $2x+2y-z-11=0$.

2) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان .

4) النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB).

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$.

2) بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0$ ثم استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

4) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} \prec \alpha \prec 0$

7) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامـة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>كاملة</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول</td><td>

1) f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)$.

$f'(x)=\frac{1}{x+1}\succ 0$ ومنه f متزايدة تماما .

2) $u_0=e$ و $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 0$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0\succ 0$ لأن $u_0=e$.

نفرض أن $u_n\succ 0$ ونبرهن أن $u_{n+1}\succ 0$

لدينا $u_n\succ 0$ ومنه $u_n+1\succ 1$ وبالتالي $\ln(u_n+1)\succ 0$ أي $u_{n+1}\succ 0$

إذن لكل $n\in N$: $u_n\succ 0$.

3) g الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$g'(x)=-\frac{x}{x+1}$

إشارة $g'(x)$

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		↗	0	↘	

إشارة $g(x)$.

لكل $x\in]-1;+\infty[$ لدينا : $g(x)\leq 0$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة :

$u_{n+1}-u_n=\ln(1+u_n)-u_n=g(u_n)\leq 0$

ومنه (u_n) متناقصة.

</td><td>0.5 ن
01 ن
0.5 ن
0.5 ن
0.5 ن
0.5 ن
0.5 ن</td><td>04 ن</td></tr>
</table>

التمرين الثاني	$p(z)=z^3-12z^2+48z-128$. 1) أ) $p(z)=(z-8)(z^2-4z+16)$. ب) حلول المعادلة $p(z)=0$. $z_1=2-2\sqrt{3}\,i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$ و $z_3=8$. 2) نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_1=2-2\sqrt{3}\,i$ و $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$ و $z_3=8$. أ) كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ على الشكل الأسي: $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$. ب) الاستنتاج : $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ معناه $(z_1-z_3)=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_3)$ وهذا يعني أن A هي صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$.	**01.5 ن** **01.5 ن** **01 ن** **01 ن**	**05** ن
التمرين الثالث	1) صحيح .لأن إحداثيات A ، B و C تحقق المعادلة . 2) خطأ . لأن $\overrightarrow{ED}(-2;-2;-1)$ لا يوازي $\vec{n}(2;2;-1)$ 3) صحيح . لأن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ 4) صحيح . لأن $\overrightarrow{AI}\,//\,\overrightarrow{AB}$	**01 ن** **01 ن** **01 ن** **01 ن**	**04** ن
التمرين الرابع	$f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$ 1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\lim\limits_{t\to1}\ln t=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)=+\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0$ ومنه $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ). $f(x)-(x+1)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\prec 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ).	**0.5 ن** **0.5 ن** **0.5 ن** **0.5 ن** **0.5 ن**	**07** ن

4) دراسة تغيرات الدالة f : — 0.5 ن

$$f'(x)=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}$$ — 0.5 ن

إشارة $f'(x)$

جدول التغيرات : — 0.5 ن

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

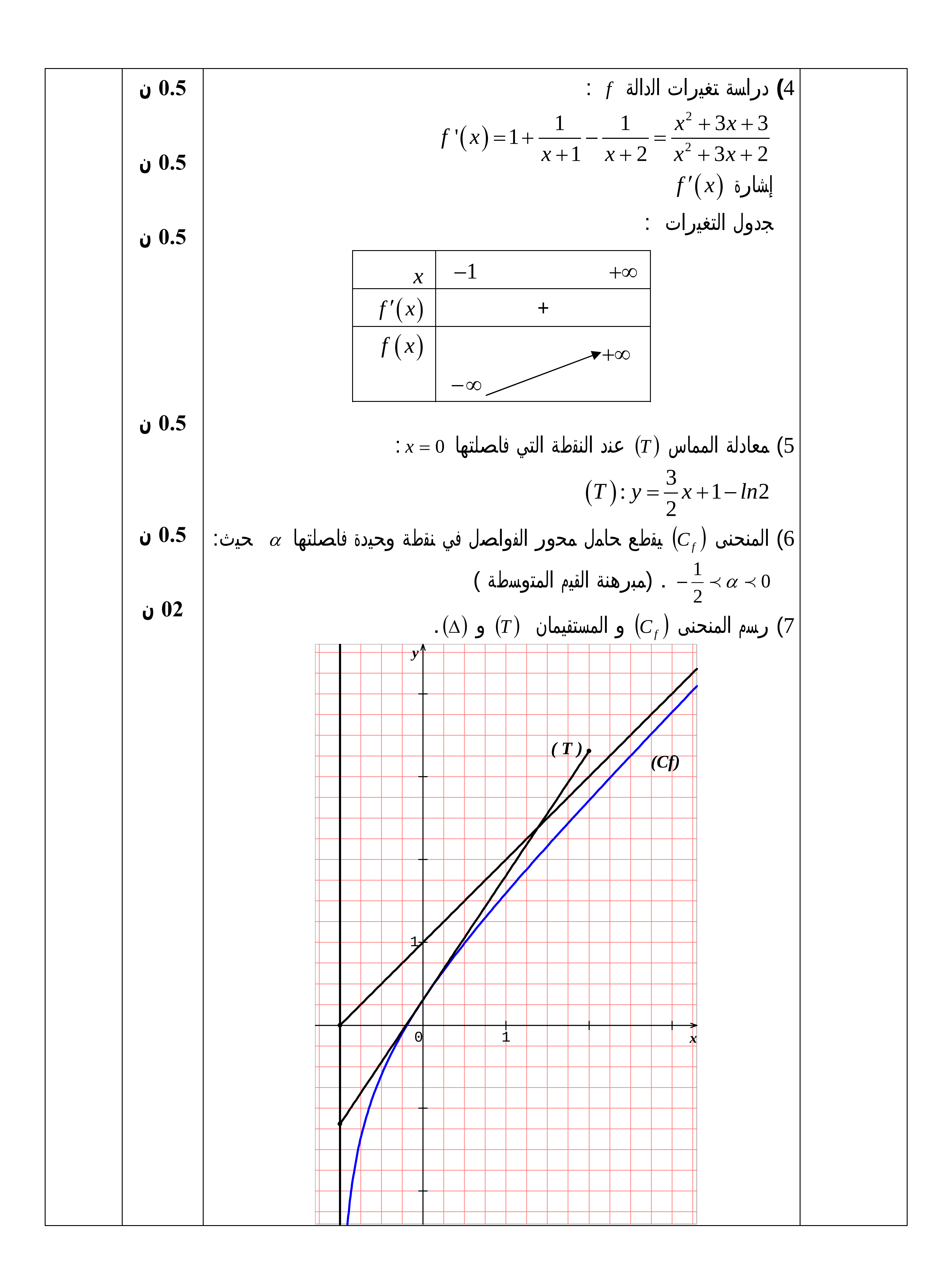
5) معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$: — 0.5 ن

$$(T): y=\frac{3}{2}x+1-ln2$$

6) المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: — 0.5 ن

$-\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 0$. (مبرهنة القيم المتوسطة)

7) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ). — 02 ن



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	**المادة : رياضيات**	**التوقيت: 8 سا - 10 سا**	**V/2**

التمرين الأول : (04 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقاط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i$ ، $z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_C=z_A\times z_B$.

1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي .

2) أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري .

3) استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها : خمس كرات تحمل الرقم 1 و ست كرات تحمل الرقم 2 و كرة واحدة تحمل الرقم 3. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

1) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

2) أحسب الأمل الرياضي $E\left(X\right)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;2;-3)$ ، $B(-3;1;4)$ ، $C(2;6;-1)$.

1) برهن أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا.

2) تحقق من أن معادلة المستوي $\left(ABC\right)$ هي : $2x-y+z+3=0$.

3) I نقطة إحداثياتها $(-5;9;4)$، أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) الذي يشمل I والعمودي على المستوي $\left(ABC\right)$.

4) أوجد إحداثيات النقطة J تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي $\left(ABC\right)$.

5) استنتج المسافة بين النقطة I و المستوي $\left(ABC\right)$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$.

نسمي (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس (و حدة الطول $3cm$) .

1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2) بين أن : $f'(x) \succ 0$ من اجل كل x من R .

3) بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب $y = x$ و $y = x - 1$.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيمين (Δ) و (Δ').

5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$ ثم تحقق أن : $e^{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha}$.

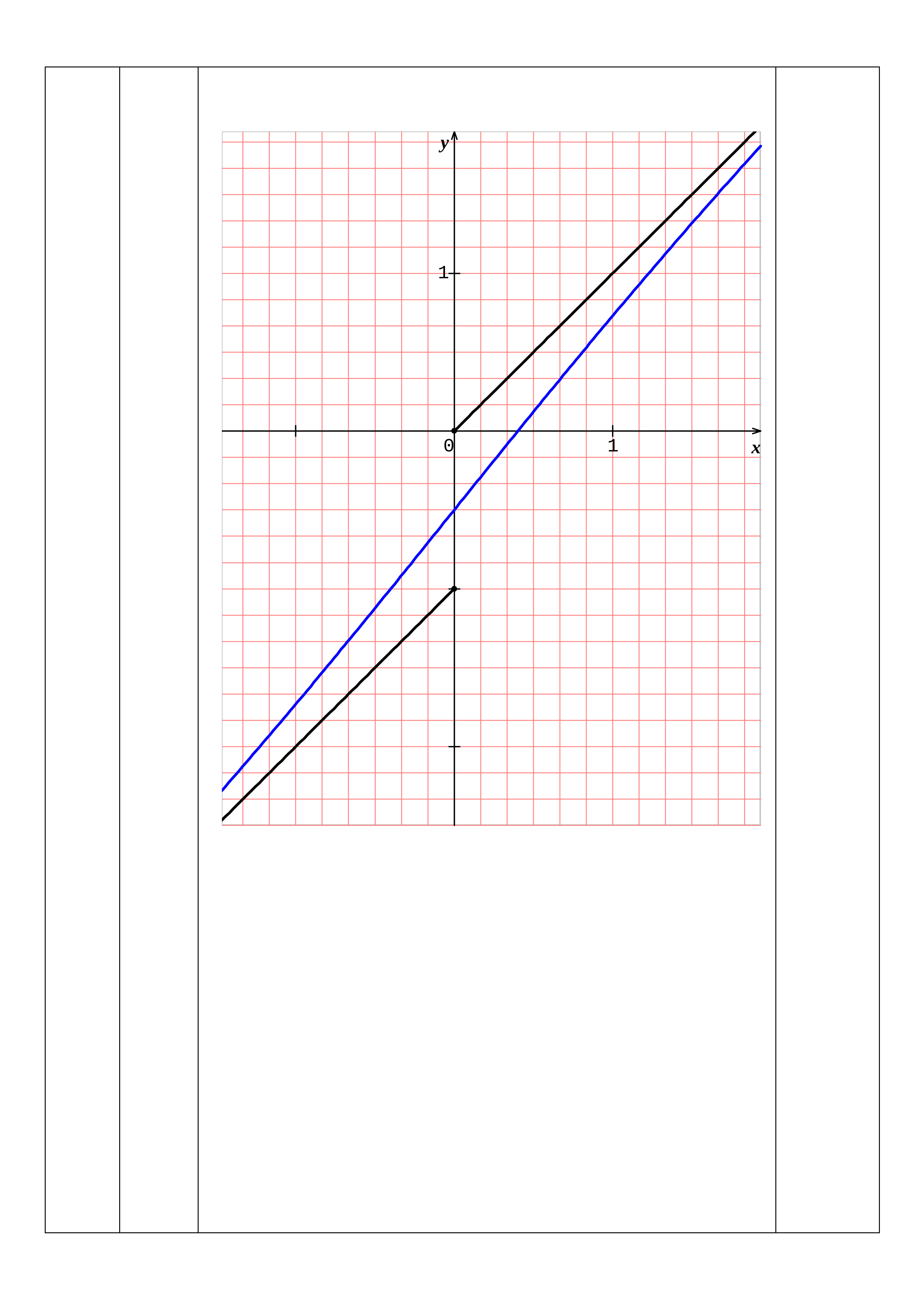
6) أنشئ (C) و (Δ) و (Δ') . (نأخذ $\alpha \approx 0.4$).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	$z_C = z_A \times z_B$ ، $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_A = -1+i$.		04 ن
	1) كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي .		
	$z_A = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}}$ و $z_C = \sqrt{2}\,e^{\frac{13\pi}{12}}$.	01.5 ن	
	2) كتابة z_B و z_C على الشكل الجبري .		
	$z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_C = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$	01.5 ن	
	3) استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{13\pi}{12}$ و $\sin\frac{13\pi}{12}$.		
	$\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	01 ن	
التمرين الثاني	1) قانون احتمال المتغير العشوائي X :		04 ن
	(الجدول أدناه)	03 ن	
	2) الأمل الرياضي : $E(X) = \frac{20+90+80+30}{66} = \frac{220}{66} = 3,33$	01 ن	
التمرين الثالث	$A(1;2;-3)$ ، $B(-3;1;4)$ ، $C(2;6;-1)$.		05 ن
	1) $\overrightarrow{AB}(-4;-1;7)$ و $\overrightarrow{AB}(1;4;2)$ غير مرتبطان خطيا إذن النقط A ، B و C تعرف مستويا.	01 ن	
	2) التحقق من أن معادلة المستوي (ABC) هي : $2x-y+z+3=0$.	01 ن	
	3) I نقطة إحداثياتها $(-5;9;4)$، المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) الذي يشمل I والعمودي على المستوي (ABC) هي :		

x_i	2	3	4	5
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{10}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$

	$\begin{cases} x=-5+2t \\ y=9-t \quad ;t\in R \\ z=4+t \end{cases}$	01 ن	
	4) إحداثيات النقطة J تقاطع (Δ) و (ABC) هي: $J(-1;7;6)$	01 ن	
	5) المسافة بين I و (ABC) هي: $IJ=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$	01 ن	
التمرين الرابع	$f(x)=x-\frac{1}{1+e^x}$.		07 ن
	1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{1+e^x}\right)=+\infty$.	0.5 ن	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.	0.5 ن	
	2) $f'(x)=1+\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\succ 0$	0.5 ن	
	3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+e^x}\right)=0$	0.5 ن	
	ومنه $(\Delta): y=x$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$	0.5 ن	
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=0$	0.25 ن	
	ومنه $(\Delta'): y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$	0.5 ن	
	4) وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):	0.25 ن	
	$f(x)-x=-\frac{1}{1+e^x}\prec 0$ ومنه (C) تحت (Δ).	0.5 ن	
	وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'):		
	$f(x)-x+1=1-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}\succ 0$ ومنه (C) فوق (Δ').	0.5 ن	
	5) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$ (مبرهنة القيم المتوسطة)	01 ن	
	$f(\alpha)=0$ تكافئ $\alpha-\frac{1}{1+e^{\alpha}}=0$ ومنه $e^{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}$.	0.5 ن	
	6) إنشاء (C) و (Δ) و (Δ') . (نأخذ $\alpha\approx 0.4$).	01.5 ن	



y
1
0
1
x

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية			الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	B/3

التمرين الأول : (04.5 نقطة)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كما يلي : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ و $u_0 = 1$

1) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على R حيث :

$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

2) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود.

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

4) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \prec 4$.

5) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

التمرين الثاني : (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. i العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$.

1) حل في C المعادلة : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

2) نسمي B, A النقطتان اللتان لاحقتهما Z_B, Z_A على الترتيب حيث Z_A الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

أ) اكتب كل من Z_A و Z_B على الشكل المثلثي.

ب) أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{2010}$.

3) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' حيث: $Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}Z$.

أ) حدد طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .

ب) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل T.

جـ) احسب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثالث : (03 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x-2y+2z+5=0$ و النقط $A(1;3;0)$ ، $B(-1;1;-1)$ ، $C(3;4;0)$ و $D(1;1;1)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير .

1) المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P) .

2) (P) مماسا لسطح الكرة (S) التي مركزها D و نصف قطرها $R=\frac{6}{\sqrt{3}}$.

3) النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AB) .

4) النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة للمستوي (P) .

التمرين الرابع : (07.5 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$.

نسمي (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس .

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ وفسر النتيجة بيانيا .

3) أ) أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f ثم أدرس تغيراتها على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) استنتج أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α و أن $-0,57\prec\alpha\prec-0,56$

جـ) حدد إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

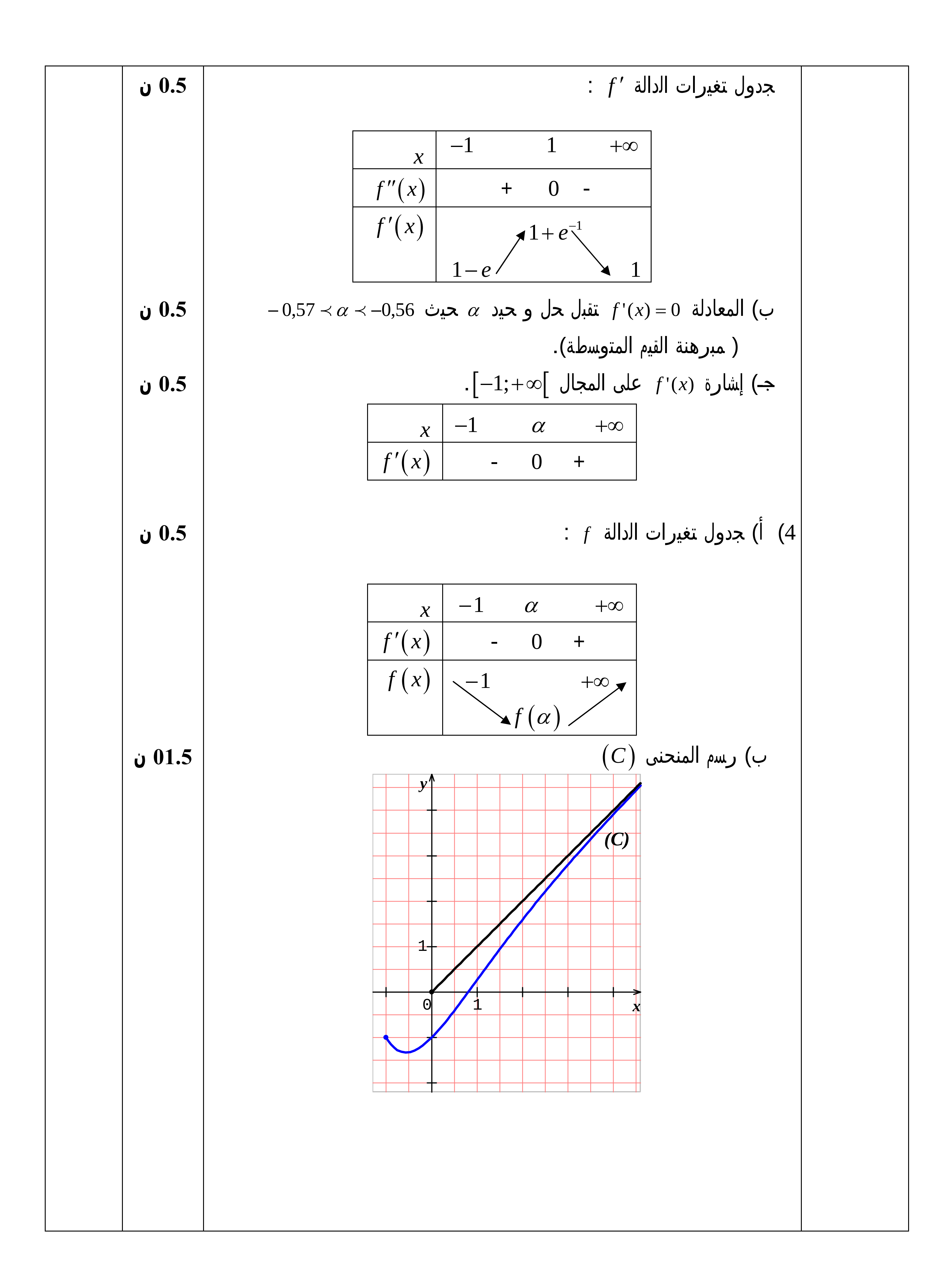
4) أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب) أرسم المنحنى (C) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية — المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}$ و $u_0=1$		04.5 ن
	1) رسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f حيث : $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$	01 ن	
	2) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 :	01.5 ن	
	3) التخمين : يظهر أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 4.	0.5 ن	
	4) برهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\prec 4$. من أجل $n=0$ لدينا $1\le u_0\prec 4$ لأن $u_0=1$. نفرض أن $1\le u_n\prec 4$ ونبرهن أن $1\le u_{n+1}\prec 4$ لدينا $1\le u_n\prec 4$ ومنه $2\le\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3}\prec 4$ أي $2\le u_{n+1}\prec 4$ ومنه $1\le u_{n+1}\prec 4$ إذن لكل $n\in N$: $1\le u_n\prec 4$	01 ن	
	5) اتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{4}{3}\ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.	0.5 ن	

التمرين الثاني	1) حلول المعادلة : $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0$.	**0.75 ن**	**05 ن**
	$\Delta=-4=(2i)^2$ ، $Z_A=\sqrt{3}+i$ و $Z_B=\sqrt{3}-i$		
	2) أ) كتابة كل من Z_A و Z_B على الشكل المثلثي.	**01 ن**	
	$Z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ و $Z_B=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$		
	ب) الشكل الجبري للعدد $\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{2010}$:	**0.5 ن**	
	$\left(\frac{Z_A}{2}\right)^{2010}=(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$		
	3) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' حيث: $Z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}Z$.	**0.5 ن**	
	أ) طبيعة التحويل T وعناصره المميزة :	**0.75 ن**	
	T دوران مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.		
	ب) C صورة النقطة A بالتحويل T : $Z_C=-\sqrt{3}+i$	**0.5 ن**	
	جـ) $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\sqrt{3}i$ نستنتج أن المثلث ABC قائم في A .	**01 ن**	
التمرين الثالث	1) صحيح .لأن $A\in(P)$ و $B\in(P)$.		**03 ن**
	2) خطأ . لأن $d(D,(P))=2\neq R$	**0.75 ن**	
	3) خطأ . لأن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.	**0.75 ن**	
	4) خطأ . لأن $\overrightarrow{AD}$ لا يوازي (P)	**0.75 ن**	
		0.75 ن	
التمرين الرابع	$f(x)=x-(x+1)e^{-x}$		**07.5 ن**
	1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-xe^{-x}-e^{-x}\right)=+\infty$	**0.5 ن**	
	2) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)=0$	**0.5 ن**	
	التفسير البياني : (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=x$.	**0.5 ن**	
	3) أ) $f'(x)=1+xe^{-x}\succ 0$	**0.5 ن**	
	تغيرات الدالة f' على المجال $]-1;+\infty[$:	**0.5 ن**	
	$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+xe^{-x}\right)=1$	**0.5 ن**	
	$f''(x)=(1-x)e^{-x}$	**0.5 ن**	
	إشارة $f''(x)$	**0.5 ن**	



جدول تغيرات الدالة f' : **0.5 ن**

x	-1 1 $+\infty$
$f''(x)$	+ 0 -
$f'(x)$	$1-e$ ↗ $1+e^{-1}$ ↘ 1

ب) المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α حيث $-0,57 \prec \alpha \prec -0,56$ **0.5 ن**

(مبرهنة القيم المتوسطة).

جـ) إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$. **0.5 ن**

x	-1 α $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +

4) أ) جدول تغيرات الدالة f : **0.5 ن**

x	-1 α $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	-1 ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$

ب) رسم المنحنى (C) **01.5 ن**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	C/4

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{9}{4}$.

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2u_n - 9$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ثم v_0 ، v_1 ، v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

4) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها : ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1 , 1 , 2 , 2 وخمس كرات خضراء تحمل الأرقام 1 , 2 , 2 , 2 , 3 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس و نعتبر الحادثتين :

A " سحب كرتين من نفس اللون " و B " سحب كرة خضراء على الأقل "

1) أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث : A ، B ، $A \cap B$.

2) هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

لكل سؤال إجابة واحدة صحيحة. اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير

1) ليكن العدد المركب Z حيث : $\overline{Z} + |Z| = 6 - 2i$. الشكل الجبري لـ Z هو :

أ) $\frac{8}{3} - 2i$ ب) $-\frac{8}{3} - 2i$ جـ) $-\frac{8}{3} + 2i$ د) $\frac{8}{3} + 2i$

2) في المستوي المركب . مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z = x + iy$ والتي تحقق $|z-1| = |z+i|$ هي :

أ) $y = x - 1$ ب) $y = -x$ جـ) $y = -x + 1$ د) $y = x$

3) ليكن n عدد طبيعي . العدد $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ يكون حقيقيا اذا و فقط اذا كان n يكتب على الشكل: $k \in Z$

أ) $3k + 1$ ب) $3k + 2$ جـ) $3k$ د) $6k$

4) لتكن المعادلة $z = \frac{6 - z}{3 - z} \ldots.(E)$ مع $Z \in C$ أحد حلول هذه المعادلة (E) هو :

أ) $2 - i\sqrt{2}$ ب) $2i$ جـ) $1 - i$ د) $-1 - i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{1+e^{x}}$.

نسمي (C)منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس (و حدة الطول $3cm$) .

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بين أن : $f'(x)\succ 0$ من اجل كل x من R .

3) بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب $y=x$ و $y=x-1$.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيمين (Δ) و (Δ').

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$ ثم تحقق أن : $e^{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}$.

6) أنشئ (C) و (Δ) و (Δ') . (نأخذ $\alpha\approx 0.4$).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{9}{4}$.		04 ن
	و $v_n = 2u_n - 9$.		
	1) $u_1 = \frac{13}{4}$ ، $u_2 = \frac{31}{8}$ و $v_0 = -5$ ، $v_1 = -\frac{5}{2}$ ، $v_2 = -\frac{5}{4}$.	1.25 ن	
	2) $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.	1.25 ن	
	3) عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = -5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.75 ن	
	4) عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{9}{2} = -5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{9}{2}$	0.75 ن	
التمرين الثاني	عدد الحالات الممكنة للسحب : $C_{12}^2 = 66$	0.5 ن	04 ن
	1) $P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{66} = \frac{19}{66}$.	01 ن	
	$P(A) = 1 - \frac{C_7^2}{66} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$.	01 ن	
	$P(A\cap B) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$	01 ن	
	2) الحادثتان A و B غير مستقلتان لأن $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$	0.5 ن	
التمرين الثالث	1) الإجابة الصحيحة : د) $\frac{8}{3}+2i$.	1.25 ن	05 ن
	2) الإجابة الصحيحة : ب) $y = -x$.	1.25 ن	
	3) الإجابة الصحيحة : ج) $3k$.	1.25 ن	
	4) الإجابة الصحيحة : أ) $2 - i\sqrt{2}$.	1.25 ن	

التمرين الرابع	الحل	التنقيط	المجموع
	. $f(x)=x-\frac{1}{1+e^x}$	0.5 ن	07 ن
	1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{1+e^x}\right)=+\infty$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.	01 ن	
	2) $f'(x)=1+\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\succ 0$	0.5 ن	
	3) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+e^x}\right)=0$	0.25 ن	
	ومنه $(\Delta):y=x$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=0$	0.5 ن	
	ومنه $(\Delta'):y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$	0.25 ن	
	4) وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ): $f(x)-x=-\frac{1}{1+e^x}\prec 0$ ومنه (C) تحت (Δ).	0.5 ن	
	وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'): $f(x)-x+1=1-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}\succ 0$ ومنه (C) فوق (Δ').	0.5 ن	
	5) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$ (مبرهنة القيم المتوسطة)	01 ن	
	$f(\alpha)=0$ تكافئ $\alpha-\frac{1}{1+e^\alpha}=0$ ومنه $e^\alpha+1=\frac{1}{\alpha}$.	0.5 ن	
	6) إنشاء (C) و (Δ) و (Δ') . (نأخذ $\alpha\approx 0.4$).	01.5 ن	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية		
وزارة التربية الوطنية		الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
امتحان المستوى – دورة ماي 2011		

المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	H/5

التمرين الأول : (04 نقاط)

أ) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_n = e^{\frac{1}{3}+2n}$.

1) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أحسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$

ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$

1) ما طبيعة المتتالية (v_n) ؟ .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

عين العدد الطبيعي n علما أن : $S' = \frac{176}{3}$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) حل في $\underline{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ و أكتب حلولها على الشكل الأسي .

2) نعتبر النقط: A ، B ، C ، D ، E ذات اللواحق على الترتيب $a=2$ ، $b=4$ ، $c=2+2i$ ،
$d=1-\sqrt{3}\,i$ ، $e=1+\sqrt{3}\,i$.

- ما هي طبيعة المثلث OCB ؟
- ما هي طبيعة الرباعي $ODAE$ ؟

التمرين الثالث : (05 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$

1) بين أن (S) سطح كرة مركزها $\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2) أ) تحقق أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S).

ب) أكتب معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$.

2) بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=0$ ثم استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

4) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\dfrac{1}{2} \prec \alpha \prec 0$

7) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصـر الإجـابة	العلامـــة مجزأة	العلامـــة كاملة
التمرين الأول	أ) $u_n = e^{\frac{1}{3}+2n}$. 1) $u_{n+1} = e^2 u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^2 وحدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{3}}$. 2) $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}\right)$. 3) $S = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{10}\right)$ يكافئ $2n+2=10$ ومنه $n=4$ ب) $v_n = \ln(u_n)$ 1) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^2 u_n) = 2 + \ln(u_n) = 2 + v_n$ ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$. 2) $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{2}{3}+2n\right) = \frac{(n+1)(3n+1)}{3}$. $S' = \frac{176}{3}$ يكافئ $(n+1)(3n+1) = 176$ ومنه $n = 7$	01 ن 0.5 ن 0.5 ن 01 ن 0.5 ن 0.5 ن	04 ن
التمرين الثاني	1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ $\Delta = -12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ، $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ كتابة الحلول على الشكل الأسي: $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}}$ و $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}}$ 2) نعتبر النقط: A ، B ، C ، D ، E ذات اللواحق على الترتيب $a=2$ ، $b=4$ ، $c=2+2i$ ، $d=1-\sqrt{3}\,i$ ، $e=1+\sqrt{3}\,i$. - طبيعة المثلث OCB : $OB = \|4\| = 4$ ، $OC = \|2+2i\| = 2\sqrt{2}$ و $BC = \|-2+2i\| = 2\sqrt{2}$ لدينا $OC = BC$ و $OC^2 + BC^2 = OB^2$	01.5 ن 0.5 ن	04 ن

إذن المثلث OCB قائم في C ومتساوي الساقين . (01 ن)

- طبيعة الرباعي $ODAE$ ؟.

لدينا $OD=OE=EA=AD=2$ (01 ن)

إذن الرباعي $ODAE$ معين.

التمرين الثالث (05 ن)

1) $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$ تكافئ (02.5 ن)

$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ ومنه (S) سطح كرة مركزها (01 ن)

$\omega(0;2;-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2) أ) التحقق من أن $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى (S). (01.5 ن)

ب) معادلة المستوى (P) المماس للكرة (S) عند النقطة A هي:

$x+y-z=0$.

التمرين الرابع (07 ن)

$$f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$$ (0.5 ن)

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$. (0.5 ن)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\lim\limits_{t\to1}\ln t=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)=+\infty$$ (0.5 ن)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=0$ (0.5 ن)

ومنه $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. (0.5 ن)

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

$f(x)-(x+1)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\prec 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ). (0.5 ن)

4) دراسة تغيرات الدالة f :

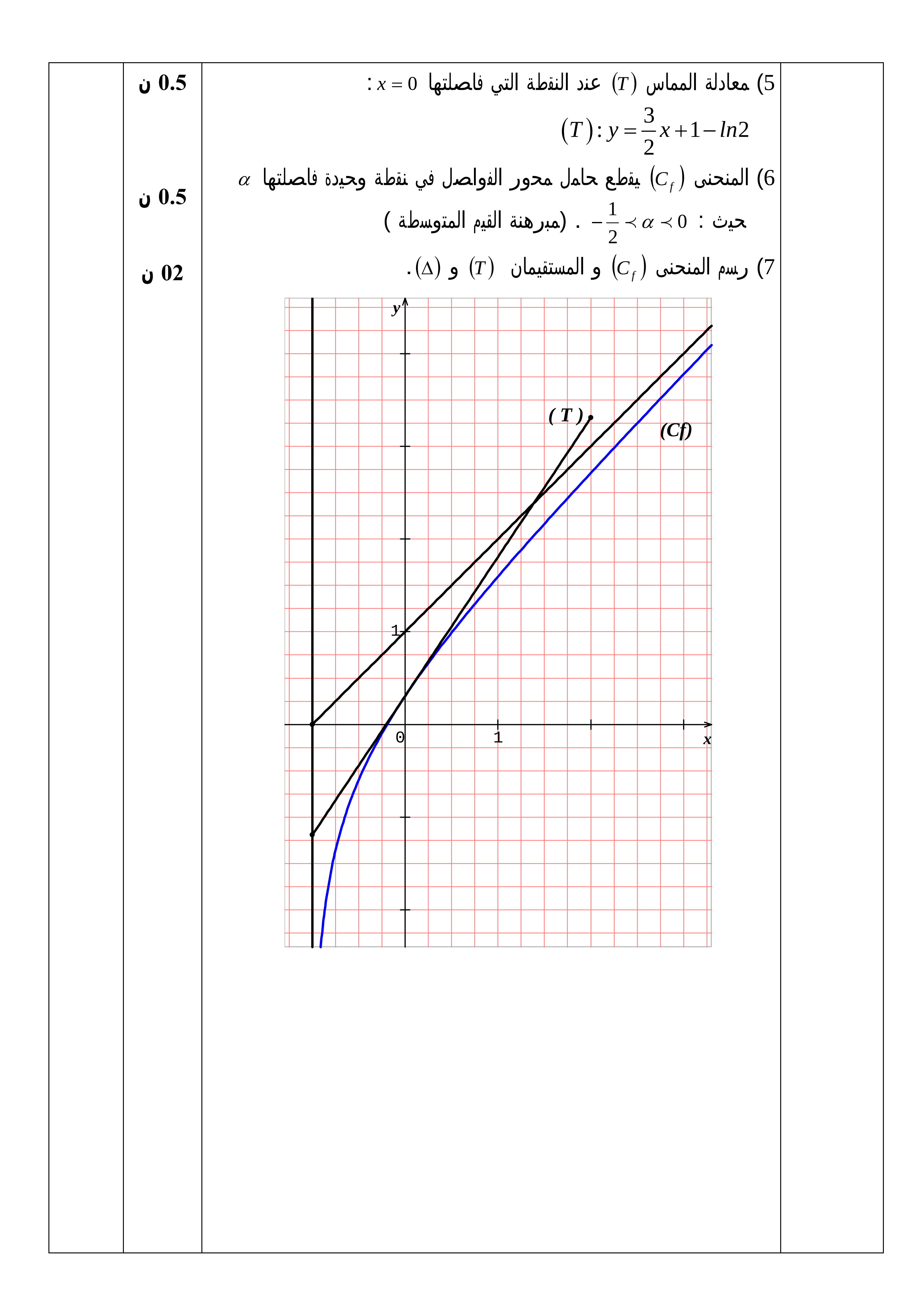
$$f'(x)=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}$$ (0.5 ن)

إشارة $f'(x)$ (0.5 ن)

جدول التغيرات :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

	0.5 ن	5) معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$: $(T): y=\frac{3}{2}x+1-ln2$	
	0.5 ن	6) المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 0$. (مبرهنة القيم المتوسطة)	
	02 ن	7) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ).	



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية		**الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد**	
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	**المادة : رياضيات**	**التوقيت: 8 سا - 10 سا**	**E/6**

التمرين الأول : (04 نقاط)

نرمي زهرتي نرد غير مزيفتين و أوجههما مرقمة من 1 إلى 6 .نرمز بـ : x للوجه الظاهر الناتج عن النرد الزرقاء و بـ : y للوجه الظاهر على وجه النرد الحمراء . و بـ : $(x;y)$ للوجهين الظاهرين بآن واحد .

1) حدد مجموعة النتائج الممكنة .

2) ما احتمال الحصول على :

أ) $A:''\ x+y \succ 6''$

ب) $B:''$ عدد أولي $x+y \succ 6''$

جـ) $C:''3$ مضاعف للعدد $x+y \succ 6''$

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل ثنائية $(x;y)$ العدد(5-) إذا كان $x \succ y$ ، العدد 0 إذا كان: $x \prec y$ ، العدد 10 إذا كان : $x = y$.

أ) أعط قيم X .

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الثاني : (04.5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقاط $A(1;1;1)$ ، $B(3;1;0)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D(2;0;1)$ و (d) مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t-5 \\ z = -t+4 \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير

1) النقطة A تنتمي الى المستقيم (d).

2) المستقيمان (d) و (BC) متعامدان

3) المستوي (ABC) معادلته $x-2y+2z-1=0$

4) نظيرة النقطة D بالنسبة للمستوي (ABC) هي النقطة $E(-1;6;-5)$

5) إحداثيات مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$ هو النقطة $G\left(-1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

6) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ هي سطح كرة نصف قطرها 6.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $z_A=1$ ، $z_B=-3-5i$ ، $z_C=-4+5i$ و $z_D=-3$ على الترتيب .

عين العناصر المميزة للتشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D.

التمرين الرابع : (07.5 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-(x+1)e^{-x}$.

نسمي (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس .

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ وفسر النتيجة بيانيا .

3) أ) أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f ثم أدرس تغيراتها على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) استنتج أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α و أن $-0,57\prec\alpha\prec-0,56$

جـ) حدد إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

4) أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب) أرسم المنحنى (C) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصـر الإجـابة	العلامـــة مجزأة	العلامـــة كاملة
التمرين الأول	1) مجموعة النتائج الممكنة $\Omega=\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(2;2);(2;3);$ $(2;4);(2;5);(2;6);(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);$ $(4;1);(4;2);(4;3);(4;4);(4;5);(4;6);(5;1);(5;2);(5;3);$ $(5;4);(5;5);(5;6);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$	01 ن	04 ن
	2) أ) $A:''\ x+y\succ 6''$ $A=\{(1;6);(2;5);(2;6);(3;4);(3;5);(3;6);(4;3);$ $(4;4);(4;5);(4;6);(5;2);(5;3);(5;4);(5;5);$ $(5;6);(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$ $P(A)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$	0.5 ن	
	ب) $B:''$ عدد أولي $x+y\succ 6''$ $B=\{(1;1);(1;2);(1;4);(1;6);(2;1);(2;3);(2;5);(3;2);$ $(3;4);(4;1);(4;3);(5;2);(5;6);(6;1);(6;5)\}$ $P(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$	0.5 ن	
	جـ) $C:''3$ مضاعف للعدد $x+y\succ 6''$ $C=\{(1;2);(1;5);(2;1);(2;4);(3;3);(3;6);$ $(4;2);(4;5);(5;1);(5;4);(6;3);(6;6)\}$ $P(C)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$	0.5 ن	
	3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل ثنائية $(x;y)$ العدد(5-) إذا كان $x\succ y$ ، العدد 0 إذا كان: $x\prec y$ ، العدد 10 إذا كان : $x=y$. أ) قيم X هي : $\{-5;0;10\}$ ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X :	0.5 ن	

x_i	-5	0	10
$P(\{X=x_i\})$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{6}{36}$

0.75 ن

الأمل الرياضي : $E(X)=\frac{-75+0+60}{36}=-\frac{15}{36}=-0,416$ — 0.25 ن

التمرين الثاني — 04.5 ن

1) صحيح .لأن إحداثيات A تحقق المعادلة . — 0.75 ن

2) خطأ. لأن $\overrightarrow{BC}(-4;-1;1)$ لا يوازي $\vec{n}(2;2-1)$ — 0.75 ن

3) صحيح.لأن إحداثيات A ، B و C تحقق المعادلة . — 0.75 ن

4) خطأ. لأن $d(D,(ABC))\neq d(E,(ABC))$ — 0.75 ن

5) صحيح. لأن باستعمال إحداثيات المرجح. — 0.75 ن

6) خطأ . لأنها سطح كرة نصف قطرها 3 . — 0.75 ن

التمرين الثالث — 04 ن

ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D .

عبارة S من الشكل $z'=az+b$.

بحل الجملة نجد : $\begin{cases} -3-5i=a+b \\ -3=(-4+5i)a+b \end{cases}$

$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و $b=-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}i$ — 01 ن

نسبة التشابه هي: $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. — 01 ن

زاوية التشابه هي : $\arg(a)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ — 01 ن

مركز التشابه هو النقطة $\omega(z_0)$ حيث

$$z_0=\frac{b}{1-a}=\frac{-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-7-9i}{1+i}=\frac{(-7-9i)(1-i)}{2}=-8-i$$ — 01 ن

التمرين الرابع — 07.5 ن

$f(x)=x-(x+1)e^{-x}$

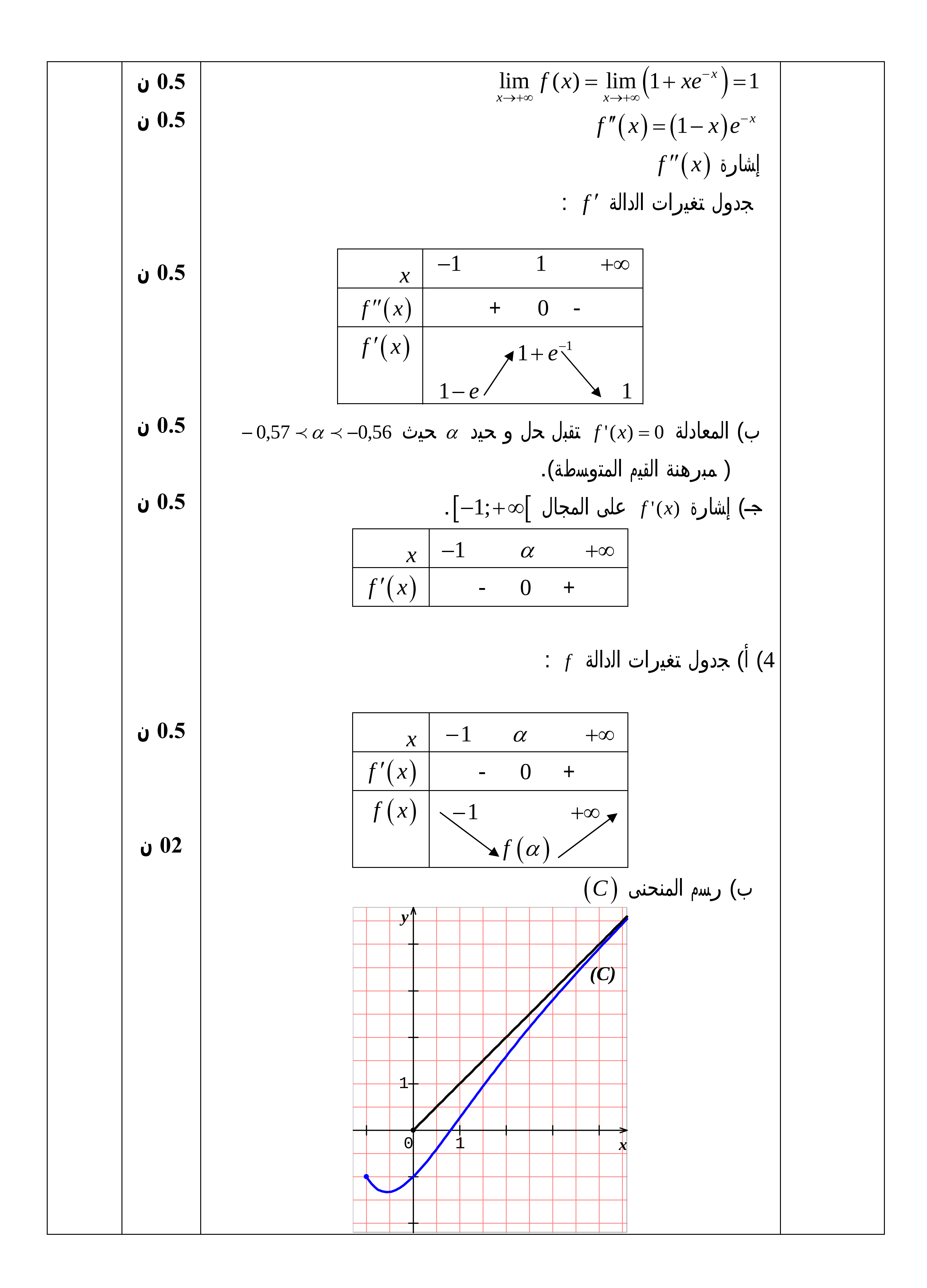
1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-xe^{-x}-e^{-x}\right)=+\infty$ — 0.5 ن

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)=0$ — 0.5 ن

التفسير البياني: (C) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=x$. — 0.5 ن

3) أ) $f'(x)=1+xe^{-x}\succ 0$ — 0.5 ن

تغيرات الدالة f' على المجال $]-1;+\infty[$: — 0.5 ن



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+xe^{-x}\right)=1$ — 0.5 ن

$f''(x)=(1-x)e^{-x}$ — 0.5 ن

إشارة $f''(x)$

جدول تغيرات الدالة f' :

x	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	
$f'(x)$	$1-e$	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

0.5 ن

ب) المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حل و حيد α حيث $-0,57 \prec \alpha \prec -0,56$ — 0.5 ن

(مبرهنة القيم المتوسطة).

جـ) إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$. — 0.5 ن

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

4) أ) جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0.5 ن

ب) رسم المنحنى (C) — 02 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد			
امتحان المستوى – دورة ماي 2011			
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات	التوقيت: 8 سا - 10 سا	U/12

التمرين الأول : (5 نقاط)

في قسم السنة الثالثة علوم تجريبية لدينا :

30% من أفراد القسم يحبون الرياضيات .

70% يحبون علوم الطبيعة و الحياة .

10% يحبون الرياضيات و علوم الطبيعة و الحياة .

نسأل أحد التلاميذ عشوائيا عن المادة المفضلة.

1) ما هو الاحتمال أن يحب هذا التلميذ الرياضيات و لا يحب علوم الطبيعة و الحياة ؟

2) ما هو الاحتمال أن لا يحب هذا التلميذ كل منهما ؟

التمرين الثاني : (5 نقاط)

تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ DA 15 000 في الشهر و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ DA 1000 بعد كل سنة .

1- ما هو المرتب الشهري بعد سنتين ؟

2- بعد كم سنة يصبح المرتب الشهري 27 000 DA ؟

التمرين الثالث : (10 نقاط)

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بالعبارة : $f(x) = x+1-\ln(x+2)$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- استنتج إشارة $f(x)$.

3- هل المنحنى (C) يقبل مماس معامل توجيهه 1 ؟

4- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5- أنشئ (Δ) و (C) في المعلم السابق .

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m المعادلة : $x-\ln(x+2)=m$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
وزارة التربية الوطنية	الديوان الوطني للتعليم والتكوين عن بعد
تصميم جواب امتحان المستوى – دورة ماي 2011	
المستوى والشعبة: 3 ثانوي علوم تجريبية	المادة : رياضيات

محاور الموضوع	عناصر الإجابـة	العلامة مجزئة	العلامة كاملة
حل التمرين 1	نفرض $P(M)$ احتمال أن يحب التلميذ الرياضيات فيكون :		5 ن
	$P(M) = \frac{30}{100} = 0,3$	0,5	
	و $P(S)$ احتمال أن يحب التلميذ علوم الطبيعة و الحياة فيكون :		
	$P(S) = \frac{70}{100} = 0,7$ وعليه : $P(M \cap S) = \frac{10}{100} = 0,1$	1	
	1- احتمال أن يحب التلميذ الرياضيات و لا يحب علوم الطبيعة و الحياة :		
	لدينا : $P(M) = P(M \cap S) + P(M \cap \bar{S})$	0,5	
	إذن : $P(M \cap \bar{S}) = P(M) - P(M \cap S)$	0,5	
	وعليه : $P(M \cap \bar{S}) = 0,3 - 0,1 = 0,2$	0,5	
	2- احتمال أن لا يحب هذا التلميذ كل منهما :		
	لدينا : $P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$	0,5	
	و منه : $P(M \cup S) = 0,3 + 0,7 - 0,1 = 0,9$	0,5	
	وعليه : $P(\overline{M \cup S}) = 1 - 0,9 = 0,1$	1	

حل التمرين 2	1- المرتب الشهري بعد سنتين هو : 17 000 DA 2- المرتب الشهري يزيد سنويا بمتتالية حسابية حدها العام : $U_n = 15000 + 1000n$ و منه يصبح المرتب الشهري 27 000 DA بعد 12 سنة .	1 2 2	5 ن
حل التمرين 3	1- دراسة تغيرات الدالة f . 2- إشارة $f(x)$. 3- المنحنى (C) لا يقبل مماس معامل توجيهه 1 . 4- معادلة المماس (Δ) هي : $y = 0,5x + 1 - ln2$ 5- إنشاء (Δ) و (C) : 6- المناقشة البيانية : المعادلة تصبح : $x + 1 - ln(x+2) = m + 1$ أي $f(x) = m + 1$ لما $m < -1$ المعادلة ليس لها حل لما $m = -1$ المعادلة تقبل حل واحد هو -1 لما $m > -1$ المعادلة لها حلين .	3 1 1 1 2 0,5 1,5	10ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف ثانويـــة:**عبد الحميد بن باديس – بيضاء برج –**

امتحان: **بكالوريا تجريبي** دورة: **مـــــاي 2015**

الشعبة : **علـــوم تجريبيـــة** يوم : **11 مـــاي 2015**

اختبار في مادة:**الرياضـــيات** المدّة :**03 ساعات و نصف**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التّاليين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- احسب الحدود u_1, u_2, u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

2- أ- برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n+3$

ب- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

ج- استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .هل يمكن القول أن (u_n)متقاربة ؟

3- نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها.

ب- عبّر عن v_n ثمّ u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

ج- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- برهن أنّ المتتالية (t_n)حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل

ب- احسب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$

و استنتج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2;0;0)$ ، $B(0;-2;0)$ ، $C(0;0;-2)$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

1. - أ- بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا نرمز له بـالرمز (Q)

-ب- بين أن للمستوي (Q) معادلة من الشكل : $x+y+z+2=0$

2. - (P) المستوي الذي يشمل النقطة I ويعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$

أ- أكتب معادلة للمستوي (P). ماذا يمثل المستوي (P)؟

ب- بين أنّ المستويين (P)و (Q)متقاطعان وفق مستقيم (d) يشمل النقطة C وأن الشعاع $\vec{U} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ هو شعاع توجيه له. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d)

3. أ- بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان ب- استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (d)

4. أ- تحقق أنّ الرباعي $OAIC$ هو رباعي الوجوه.

ب- احسب المسافة $d(O,(Q))$ ، ثم احسب حجم الرباعي الوجوه $OAIC$

التمرين الثّالث:(04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ النقط :

A ، B و C التّي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$, $z_C=2$

أ) بيّن أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عيّن طبيعة المثلث ABC.

ج) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC. أرسم (C)

1. **أ)** عيّن الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقّق $2(z+\overline{z})+z\overline{z}=0$.

ب) تحقق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

2. ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عيّن صورة النقطة B بالدوران R

ب- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج- عيّن صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

التمرين الرّابع:(07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعلاقة $g(x)=-\frac{2x}{x+1}+\ln(x+1)$

(C) المنحنى البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/ احسب نهايتي g عند -1 و $+\infty$

2/ ادرس اتجاه تغيرات الدالة g وشكّل جدول تغيراتها

3/ بيّن أن المنحنى المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر فاصلته α حيث $3.9<\alpha<4$.

4/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5/ انشئ (T) و (C).

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $g(x)=-x+|m|$.

الجزء الثّاني: نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{2x})$.

(φ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1/ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=-e^{-x}\times g(e^{2x})$.

2/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$.

3/ ادرس اتجاه تغيرات الدالة f.

4/ بيّن أن $f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$ ثم جد حصرًا للعدد $\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$

5/ - أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$ **ب)** استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

6/ بيّن أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ (لاحظ أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشّكل $f(x)=e^x\times\frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}$)

7/ شكّل جدول تغيرات الدّالة f

8/ انشئ المنحنى (φ)

انتهـــــى الموضوع 1

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

I) نعتبر الدّالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\sqrt{x-1}$

و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$ معطى في الملحق

II) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0=\frac{5}{4}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$:

أ) برهن بالتراجع أن : $1<u_n<2$

ب) باستعمال المنحني (C) والمستقيم $(\Delta): y=x$. علّم على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

ت) ضع تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) برهن تخمينك

ث) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة عيّن نهايتها

III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) برهن أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب) أكتب v_n ثم u_n بدلالة n

ج.) احسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$

التمرين الثّاني: (05 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقطتين : $A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ ،

و (Δ) المستقيم المعرّف بمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$; $(\Delta):\begin{cases}x=6t-2\\y=-2t+1\\z=4t\end{cases}$

1. اكتب تمثيلا وسيطيّا بدلالة الوسيط k للمستقيم (AB)
2. بيّن أن المستقيمين (Δ) و (AB) لا ينتميان الى نفس المستوي
3. (P) هو المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) و يوازي (Δ)
   أ- تحقق ان الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P) ثم استنتج معادلة ديكارتية له
   ب- احسب المسافة d بين (Δ) و (P)
4. أ- عيّن احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$
5. لتكن (δ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $MA^2-MB^2=2$.
   - تحقق ان النقطة $H(1;1;0)$ تنتمي الى (δ) ثمّ استنتج طبيعة المجموعة (δ).
6. لتكن نقطة متغيرة من (Δ) ونعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(t)=AN^2$.
   - ادرس اتجاه تغيرات f استنتج ثانية المسافة بين (Δ) و A

التمرين الثّالث:(05 نقاط)

1- في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقط A ، B ، C
ذات اللواحق $z_A = 1+i$, $z_B = -1+3i$, $z_C = -3+i$ على الترتيب

أ- علّم النقط A ، B ، C

ب- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C. عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز التحاكي h

2- أ- نضع $L = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث L^n تخيليا صرفا

3- لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

أ- بيّن أن D مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها

ب- عيّن z_D لاحقة D و z_I لاحقة I

ج- عين وانشئ المجموعة (φ) للنقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

4- نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 1+5i$

أ- اكتب على الشّكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$ ثم استنتج أن $DE = 2AI$ و (DE) يعامد (AI)

ب- عيّن مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول D إلى I و يحول E إلى A.

ج- ما هي صورة الدّائرة التّي مركزها D وتشمل E بالتّشابه المباشر S.

التمرين الرّابع:(06 نقاط)

لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1. أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + x - 1$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-1)\right]$ ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا.

أدرس وضعية (C_f) مع مستقيمه المقارب (Δ)

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج إشارة f' ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

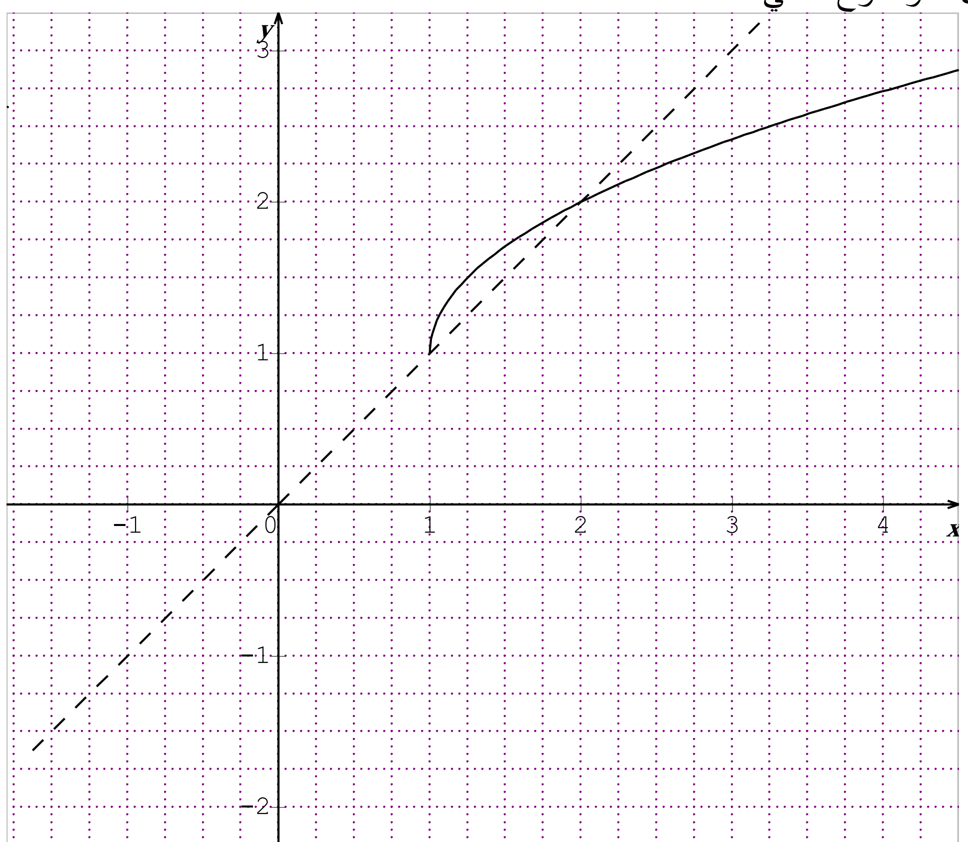
4) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) عند نقطة يطلب تعيين إحداثييها ثم أكتب معادلة لـ (T)

5) أنشئ كلا من المستقيمين (Δ) و (T) ، ثمّ المنحنى (C_f).

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $2\ln x - xm = x$

ملاحظة: مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على حامل محور الفواصل ثم أعد هذه الوثيقة مع ورقة الإجابة

الوثيقة المرفقة الخاصة بالتمرين الأول للموضوع الثّاني



الإسم:.......................

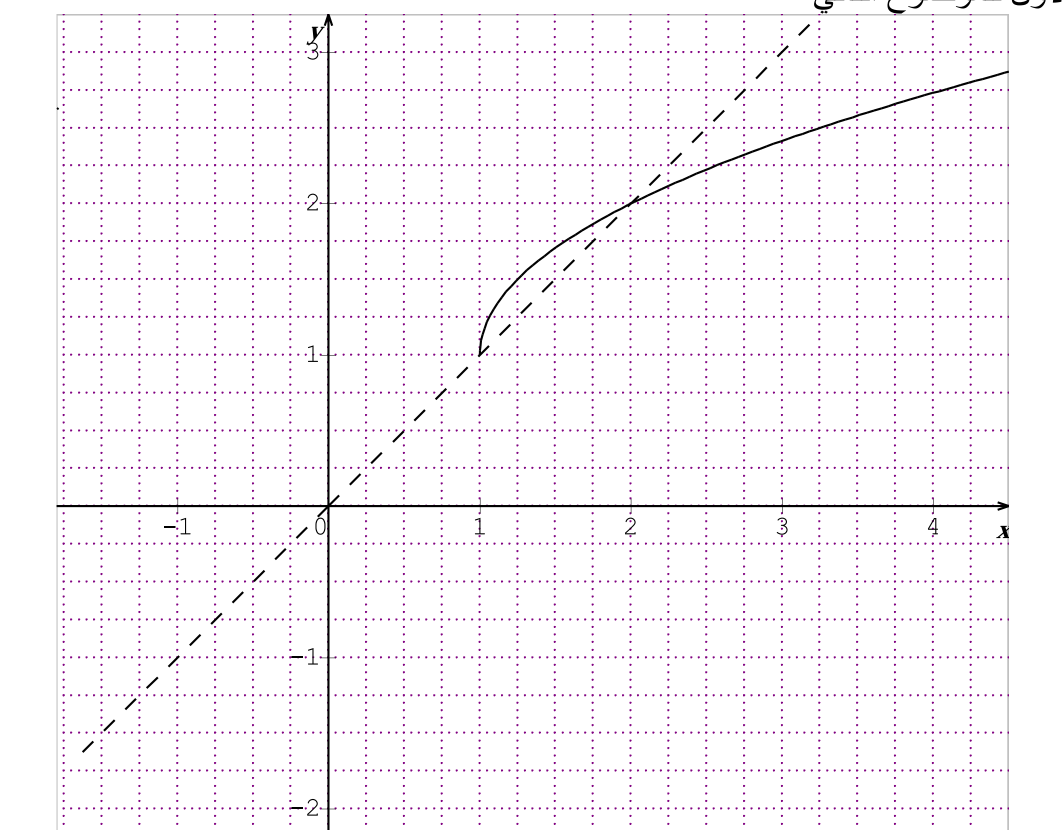
اللقب:.......................

القسم:

....

ملاحظة: مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على حامل محور الفواصل ثم أعد هذه الوثيقة مع ورقة الإجابة

الوثيقة المرفقة الخاصة بالتمرين الأول للموضوع الثّاني



الإسم:.......................

اللقب:.......................

القسم:

❀ الجمهورية الجزائرية الديمقراطية❀

❀وزارة التّربية الوطنيّة ❀ ❀مديرية التّربية لولاية سطيف❀

❀ المستوى و الشّعبة : نهائي علوم تجريبية ❀ ❀ ثانوية :عبد الحميد بن باديس (بيضاء برج) ❀

❀الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية دورة ماي 2015 ❀

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

-1 **حساب الحدود** u_1, u_2, u_3 :

$u_1 = \frac{7}{3}$ ، $u_2 = \frac{26}{9}$ ، $u_3 = \frac{97}{27}$

- **تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية** (u_n): متتالية متزايدة

-2 **أ- البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن** $u_n \leq n+3$

لتكن فرضية التراجع $P(n): u_n \leq n+3$

* المرحلة 1: الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0 = 2$ أي $P(n): u_0 \leq 3$

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n \leq n+3$ و

نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \leq n+1+3$ أي $u_{n+1} \leq n+4$

لدينا $u_n \leq n+3$ و منه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 3\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n + 1$ و بالتالي $u_{n+1} \leq n+3$

ولدينا $n+3 \leq n+4$ و منه $u_{n+1} \leq n+4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

إذن $u_n \leq n+3$.

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n):

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ و لدينا $u_n \leq n+3$ أي

$-\frac{1}{3}u_n \geq -\frac{1}{3}n - 1$ و منه $-\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \geq 0$ و بالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و منه متزايدة

ج- استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة :

لدينا (u_n) متزايدة معناه $u_n \geq u_0$ أي $u_n \geq 2$ نستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن (u_n) متقاربة : لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

-3 **نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة** $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أنّ المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأوّل وأساسها:

(v_n) **هي متتالية هندسية معناه** $v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا $v_n = u_n - n$ و منه $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1$ و بالتالي $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$ و منه $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ وبالتالي :

(v_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0 = u_0 - 0 = 2$

ب- التعبير عن v_n ثمّ u_n بدلالة n ثم حساب نهاية (u_n) عند $+\infty$

$v_n = v_0 \times q^n$ أي $v_n = 2\times(\frac{2}{3})^n$ ، $u_n = v_n + n$ و منه $u_n = 2\times(\frac{2}{3})^n + n$: $\lim u_n = +\infty$

ج- حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$S_n = (v_0+1)+(v_1+1)+\ldots+(v_n+n) = v_0+v_1+\ldots+v_n+1+2+\ldots n$$

$$= 2\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + n(n+1) = 6(1-(\frac{2}{3})^{n+1}) + n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- **البرهان أنّ المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل:** (t_n) حسابية معناه $t_{n+1} = t_n + r$

لدينا $t_n = \ln(v_n)$ و منه $t_{n+1} = \ln(v_{n+1})$ أي $t_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}v_n) = \ln(v_n) + \ln(\frac{2}{3})$

لأنّ $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ و منه $t_{n+1} = t_n + \ln(\frac{2}{3})$ و منه (t_n) حسابية أساسها $r = \ln(\frac{2}{3})$ و وحدها الأوّل $t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$

ب- حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ **:**

$$A_n = \frac{n+1}{2}(\ln(2) + \ln(2) + n\ln(\frac{2}{3})) = \frac{n+1}{2}(2\ln(2) + n\ln(\frac{2}{3}))$$

- **استنتاج بدلالة n الجداء** $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

$P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \ldots \times e^{t_n} = e^{t_0+t_1+\ldots t_n}$ لأن : $v_n = e^{t_n}$ و منه $P_n = e^{S_n}$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2;0;0)$ ، $B(0;-2;0)$ ، $C(0;0;-2)$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

1. - أ- نبيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا نرمز له بـالرمز (Q)

النقط A ، B ، C تعين مستوي معناه A ، B ، C ليست في استقامة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا

$\overrightarrow{AB}(2;-2;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;0;-2)$ لدينا $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{2}$ و منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ب- نبين أن للمستوي (Q) معادلة من الشكل : $x+y+z+2=0$

- نعوض باحداثيات النقط A ، B ، C نجد

$$\begin{cases}(-2)+0+0+2=0\\0+(-2)+0+2=0\\0+0+(-2)+2=0\end{cases}$$ و منه $x+y+z+2=0$ معادلة للمستوي (Q)

2. - (P) المستوي الذي يشمل النقطة I و يعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$

أ- كتابة معادلة للمستوي (P) و ماذا يمثل المستوي (P):

$\overrightarrow{AB}(2;-2;0)$ ناظمي للمستوي (P) و يشمل I حيث $I(\frac{-2+0}{2};\frac{0-2}{2};\frac{0+0}{2})$ أي $I(-1;-1;0)$

و منه $(P): 2x-2y+d=0$ (P) و يشمل I معناه $2(-1)-2(-1)+d=0$ أي $d=0$

وبالتالي معادلة للمستوي (P) هي $(P): x-y=0$

ب- نبين أنّ المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (d) يشمل النقطة C وأن الشعاع $\vec{U}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ **هو شعاع توجيه له و كتابة تمثيلا و سيطيا للمستقيم** (d)

$\begin{cases} x-y=0..............(P) \\ x+y+z+2=0....(Q) \end{cases}$ نضع $y=t$ فيكون $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t-2 \end{cases}$

3. أ- نبيِّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان معناه $\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CI}=0$

$\overrightarrow{AI}(1;-1;0)$ ، $\overrightarrow{CI}(-1;-1;2)$ و منه $\overrightarrow{AI}\bullet\overrightarrow{CI}=1(-1)+(-1)(-1)=-1+1=0$

ت- استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (d):

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان و (d) **يشمل النقطة** C **فإنّ** $d(A;(d))=AI$

ومنه $AI=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ **و بالتالي** $d(A;(d))=\sqrt{2}cm$

4. أ- تحقق أنّ الرباعي $OAIC$ هو رباعي الوجوه:

الرباعي $OAIC$ هو رباعي الوجوه معناه النقط A ، B ، C و O **: لدينا** A ، B ، C **تنتمي الى المستوي** (Q) **ذو المعادلة** $x+y+z+2=0$ و O لا تنتمي إلى (Q) لأن $0+0+0+2\neq 0$

ب- حساب المسافة $d(O,(Q))$ ، **ثم احسب حجم الرباعي الوجوه** $OAIC$

$$d(O,(Q))=\frac{|0+0+0+2|}{\sqrt{1^1+1^1+1^1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ **و منه** $d(O,(Q))=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm$

حجم الرباعي الوجوه $OAIC$ **:** $V=\frac{1}{3}S_{(ABC)}h$ **حيث** $h=d(O,(Q))=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm$ **و**

$$S_{(ABC)}=\frac{1}{2}AI\times IC=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}cm^2$$ **و منه**

$$V=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}cm^3$$ أي $V=\frac{2}{3}cm^3$.

التمرين الثّالث:(04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ **معناه** $\begin{cases} (z-2)=0.............(1) \\ (z^2+2z+4)=0....(2) \end{cases}$ و منه من (1)نجد $z=2$

و من نحس الميز حيث $\Delta=-12=12i^2$ و منه $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$ يوجد حلان هما

$z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=-1-i\sqrt{3}$ و بالتالي $S=\{2;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\}$

II. نعتبر في المستوي المركب : $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$, $z_C=2,$

أ) نبيّن أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **:**

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})}$$

و منه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC **:** المثلث ABC متقايس الأضلاع

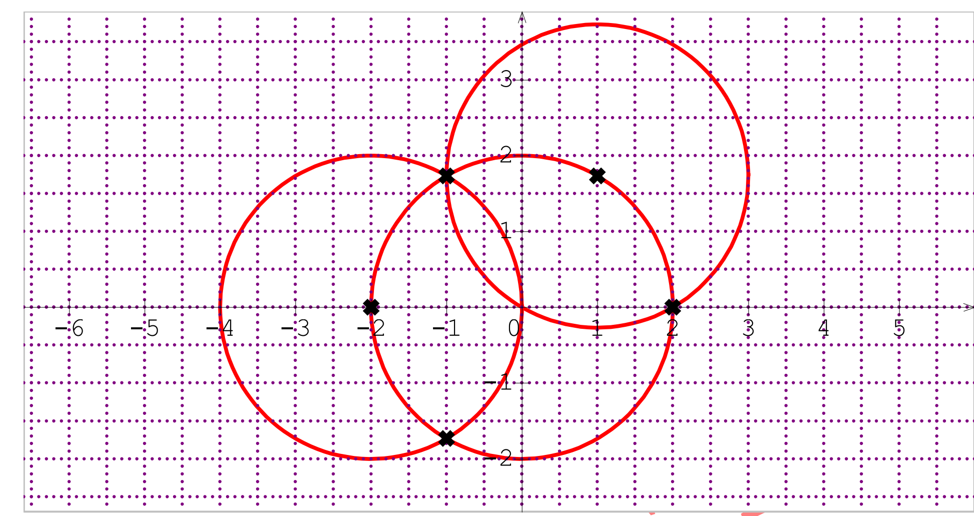
ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC. أرسم (C)

مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC هو Ω مركز ثقل المثلث حيث $z_\Omega = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

أي $z_\Omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3} -1 - i\sqrt{3} + 2}{3} = 0$ و منه $\Omega(0;0)$

ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC هو $OA = OB = OC = |z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

الرسم (C):



1.أ) تعيين الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z

و التي تحقّق: $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$.

ليكن $z = x + iy$ و منه لدينا $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x$ و $z\overline{z} = x^2 + y^2$ و منه

$2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$ تكافئ $2(2x) + x^2 + y^2 = 0$ و منه $4x + x^2 + y^2 = 0$

تكافئ $(x+2)^2 + y^2 = 4$ و منه للمجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $\omega(-2.0)$ ونصف قطرها $r = 2$

ب) التحقق من أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ):

لدينا $A(-1;\sqrt{3});B(-1;-\sqrt{3})$ بالتعويض في المعادلة $(x+2)^2 + y^2 = 4$ نجد

$\begin{cases}(-1+2)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \\ (-1+2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4\end{cases}$ و منه احداثيات $A;B$ تحقق المعادلة $(x+2)^2 + y^2 = 4$

2. ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

لدينا $|a| = 1$ و $\arg\ a\ = \dfrac{\pi}{3}$ اذن $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ولدينا $Z_A = \dfrac{b}{1-a}$ ومنه $b = Z_A\ 1-a\ = 1+\sqrt{3}i$

اذن الكتابة المركبة للدوران من الشكل $Z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z + 1 + \sqrt{3}i$

أ- تعيّن صورة النقطة B بالدوران R

صورة B بالدوران R هي C لان: $Z_C = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z_B + 1 + \sqrt{3}i = 2$

ب- تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R: $Z_D = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z_C + 1 + \sqrt{3}i = 2 + 2\sqrt{3}i$

- **استنتاج طبيعة الرباعي** $ABCD$: معيّن

ج- عيّن صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

صورة المجموعة (Γ) بالدوران R هي دائرة مركزها $\omega'(1;\sqrt{3})$ ونصف قطرها $r=2$

التمرين الرّابع:(07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعلاقة $g(x)=-\dfrac{2x}{x+1}+\ln(x+1)$

1/حساب نهايتي g **عند** -1 **و** $+\infty$ **:** $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

2/ دراسة اتجاه تغيرات الدالة g وشكّل جدول تغيراتها :

$$g'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

أشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$ * جدول التغيرات :

x	-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$ln2-1$	↗	$+\infty$

3/ نبيّن أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر فاصلته** α **حيث** $3.9<\alpha<4$.

حل معدوم $g(0)=0$ و الآخر حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(3.9)\times g(4)<0$ و g متزايدة تماما

4/ معادلة المماس (T) **للمنحنى** (C) **عند النقطة ذات الفاصلة** 0**:**

$(T): y=g'(0)(x-0)+g(0)$ لدينا $g'(0)=-1$ و $g(0)=0$ و منه $(T): y=-x$

5/ انشاء (T) **و** (C)



6/ المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m **عدد واشارة حلول المعادلة** $g(x)=-x+|m|$ **:**

$g(x)=-x+|m|=\begin{cases}-x+m;m>0\\-x-m;m<0\end{cases}$ و منه

- $m=0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
- $m\in\mathbb{R}^*$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

الجزء الثّاني: نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{2x})$:

1/ ابيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x **لدينا** $f'(x)=-e^{-x}\times g(e^{2x})$

$$f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{2x})=-e^{-x}\ln(1+e^{2x})+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\times e^{-x}$$

$$=-e^{-x}\left(\ln(1+e^{2x})-\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)=-e^{-x}g\ \ e^{2x}$$

2/ الحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$.

$f'(x)=0$ تكافئ $-e^{-x}g\ e^{2x}=0$ تكافئ $g\ e^{2x}=0$ تكافئ $e^{2x}=0$ مرفوض

او $e^{2x}=\alpha$ مقبول تكافئ $x=\ln\sqrt{\alpha}$ و منه حلول المعادلة $f'(x)=0$ هي $S=\ln\sqrt{\alpha}$

3/ دراسة اتجاه تغيرات الدالة f :

إشارة الدالة المشتقة عكس إشارة $g\ e^{2x}$

- لدينا حسب المنحنى البياني للدالة g تكون $g\ e^{2x}<0$ و منه $0<e^{2x}<\alpha$ أي $x<\ln\sqrt{\alpha}$

ومنه $-e^{-x}\times g(e^{2x})>0$ لما $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$ و منه الدالة متزايدة على المجال $x\in\left]-\infty,\ln\sqrt{\alpha}\right[$

- لدينا حسب المنحنى البياني للدالة g تكون $g\ e^{2x}>0$ و منه $e^{2x}>\alpha$ و أي $x>\ln\sqrt{\alpha}$ و

منه $-e^{-x}\times g(e^{2x})>0$ لما $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$ و منه الدالة متناقة على المجال $x\in\left]\ln\sqrt{\alpha};+\infty\right[$

4/نبيّن أن $f(\ln\sqrt{\alpha})=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$ ثم جد حصرًا للعدد $\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$:

لدينا $f(\ln\sqrt{\alpha})=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}=e^{-\ln\sqrt{\alpha}}\ln(1+e^{2\ln\sqrt{\alpha}})=e^{\ln(\sqrt{\alpha})^{-1}}\ln(1+e^{\ln\alpha})=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln(1+\alpha)$

و من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}$ بالتعويض نجد

$$f(\ln\sqrt{\alpha})=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha+1)}=\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\alpha}(\alpha+1)}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{(\alpha+1)}$$

5/ - أ) نبين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\dfrac{2x}{e^{x}}+\dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{x}}$

$$f(x)=e^{-x}\ln\left[e^{2x}(e^{-2x}+1)\right]=\frac{1}{e^{x}}(\ln(e^{2x})+\ln(e^{-2x}+1))=\frac{2x}{e^{x}}+\frac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{x}}$$

ب) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{e^{x}}+\dfrac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{x}}\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{e^{x}}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^{x}}\Big)=0$

6/ البرهان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ (لاحظ أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشّكل $f(x)=e^{x}\times\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}$ **)**

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}\times\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}})=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}=0$

7/ جدول تغيرات الدّالة f

x	$-\infty$	$ln(\sqrt{(a)})$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$2\sqrt{(a)}/a+1$	↘ 0

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6

1

−1

8/ انشئ المنحنى (φ)

❀❀❀❀❀❀❀____________________❀❀❀❀❀❀❀

❀ الجمهورية الجزائرية الديمقراطية❀

❀وزارة التّربية الوطنيّة ❀ ❀مديرية التّربية لولاية سطيف❀

❀ المستوى و الشّعبة : نهائي علوم تجريبية ❀ ❀ ثانوية :عبد الحميد بن باديس (بيضاء برج) ❀

❀الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية دورة ماي 2015 ❀

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

I) نعتبر الدّالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\sqrt{x-1}$: $u_0=\frac{5}{4}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$:

أ) البرهان بالتراجع أن : $1<u_n<2$

لتكن فرضية التراجع $P(n):1<u_n<2$

* المرحلة 1: الخاصية $P(1)$ صحيحة من أجل $n=1$ لأن $u_0=\frac{5}{4}$ أي $P(1):1<u_0<2$

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n>1$ أي $1<u_n<2$ و

نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $P(n+1):1<u_{n+1}<2$

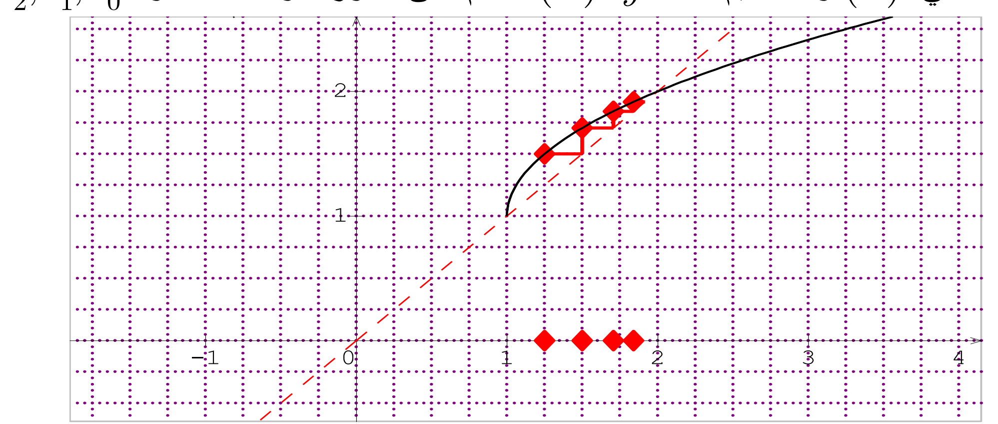
لدينا $1<u_n<2$ و منه $0<u_n-1<1$ و و منه $1<1+\sqrt{u_n-1}<2$ بالتالي $1<u_{n+1}<2$

و منه إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

إذن $1<u_n<2$.

ب) باستعمال المنحني (C) والمستقيم $(\Delta):y=x$. علّم على محور الفواصل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0



ت) تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): من التمثيل $u_3>u_2>u_1>u_0$ و منه (u_n) متتالية متزايدة

البرهان على التخمين : (u_n) متزايدة

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\frac{(\sqrt{u_n-1}-(u_n+1))\times(\sqrt{u_n-1}-(u_n+1))}{(\sqrt{u_n-1}+(u_n+1))}$$

و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1-(u_n+1)^2}{(\sqrt{u_n-1}+(u_n+1))}=\frac{-u_n{}^2+3u_n-2}{(\sqrt{u_n-1}+(u_n+1))}$ و منه

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(u_n-1)}{(\sqrt{u_n-1}+(u_n+1))}$$

لدينا $1<u_n<2$ و منه $0<2-u_n$ و $0<u_n-1$ و $\sqrt{u_n-1}+u_n+1>0$ و بالتالي

$u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ث) استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة عيّن نهايتها

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة و $u_n<2$ فهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة ونهايتها 2

III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) البرهان أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(v_n) هي متتالية هندسية معناه $v_{n+1}=v_n\times q$:

لدينا $v_n=\ln(u_n-1)$ و منه $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)$ و منه

$$v_{n+1}=\ln(1+\sqrt{u_n-1}-1)=\ln(\sqrt{u_n-1})=\ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

ب) كتابة v_n ثم u_n بدلالة n

$v_n=v_0\times q^n$ و $v_0=\ln(u_0-1)=\ln(\frac{5}{4}-1)=\ln(\frac{1}{4})=-\ln 4$ وبالتالي $v_n=-\ln 4\times(\frac{1}{2})^n$

ويما أنّ $v_n=\ln(u_n-1)$ فإنّ $e^{v_n}=e^{\ln(u_n-1)}$ و منه $u_n=e^{v_n}+1$ و منه $u_n=e^{-\ln 4\times(\frac{1}{2})^n}+1$

ج.) حساب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n$:

$$S_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\ln 4\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=-2\ln(4)\times(1-(\frac{1}{2})^{n+1})$$

<u>التمرين الثّاني: (05 نقاط)</u>

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقطتين : $A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ ،

1. كتابة تمثيلا وسيطيّا بدلالة الوسيط k للمستقيم (AB) لتكن $M(x;y;z;)$ **نقطة من افضاء تحقق**

حيث $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1;z-2)$ و منه $(AB):\begin{cases}x=-2k+2\\y=k+1\\z=-3k+2\end{cases};(k\in\mathbb{R})$

2. نبيّن أن المستقيمين (Δ) و (AB) لا ينتميان الى نفس المستوي:

$\begin{cases}6t-2=-2k+2\\-2t+1=k+1\\4t=-3k+2\end{cases}$ بحل الجملة نجد $k=-4$ $t=2$ بالتعويض نجد نقطتين مختلفتين

3. (P) هو المستوي الذي يشمل المستقيم (AB) و يوازي (Δ)

أ- التحقق ان الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P) ثم استنتج معادلة ديكارتية له

$\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P) معناه $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0$ لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ و منه

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=1(-2)+5\times1+1(-3)=3-3=0$$

ب- حساب المسافة d بين (Δ) و (P)

4. **أ- تعيي احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$**

$I(\frac{2+0}{2};\frac{1+2}{2};\frac{2-1}{2})$ أي $I(1;\frac{3}{2};1)$

5. لتكن (δ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = 2$.

- التحقق ان النقطة $H(1;1;0)$ تنتمي الى (δ) ثمّ استنتاج طبيعة المجموعة (δ).

$H(1;1;0)$ **تنتمي الى** (δ) **معناه** $HA^2 - HB^2 = 2$ و منه

6. لتكن نقطة متغيرة من (Δ) ونعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(t) = AN^2$.

- ادرس اتجاه تغيرات f استنتج ثانية المسافة بين (Δ) و A

N نقطة من المستقيم (Δ) **معناه** $N(6t-2;-2t+1;4t)$

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}2-6t+2\\1+2t-1\\2-4t\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}-6t\\2t\\2-4t\end{pmatrix}$ ومنه $AN^2 = (-6t)^2 + (2t)^2 + (2-4t)^2$ وبالتالي

$AN^2 = 36t^2 + 4t^2 + 4 + 16t^2 - 16t = 56t^2 - 16t + 4$ و منه $f(t) = 56t^2 - 16t + 4$

$f'(t) = 112t - 16$

$f'(t) = 0$ أي $112t = 16$ وبالتالي $t = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$

المسافة بين (Δ) و A هي $f(\frac{1}{7}) = 56(\frac{1}{7})^2 - 16(\frac{1}{7}) + 4 = \frac{56}{49} + \frac{16}{7} + 4$ و

منه $f(\frac{1}{7}) = \frac{364}{49} = \frac{52}{7}$

<u>التمرين الثّالث:(05 نقاط)</u>

1- في المستوي المركب $z_A = 1+i$, $z_B = -1+3i$, $z_C = -3+i$

أ- علّم النقط A ، B ، C

ب- h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C. عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز التحاكي h:

h هو التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C عبارته المركبة من الشكل $z' = 2z + b$ و منه

$\begin{cases} z_C = 2z_A + b \\ z_\omega = 2z_\omega + b \end{cases}$ وبالتالي $z_\omega - z_C = 2z_\omega - 2z_A$ و منه

$z_\omega = 2z_A - z_C = 2(1+i) + 3 - i = 5+i$ و منه $z_\omega = 5+i$

2- أ- نضع $L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم استنتج طبيعة المثلث ABC :

$L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i+1-3i}{-3+i+1-3i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{i(-2i-2)}{-2-2i} = i$ و منه $L = i$

$|L| = |i| = 1$ و $Arg(L) = Arg(i) = \frac{\pi}{2}$

- **استنتاج طبيعة المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين**

ب- عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث L^n تخيليا صرفا:

لدينا $L = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ و منه $L^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$

L^n تخيليا صرفا معناه $\cos\frac{n\pi}{2}=0$ تكافئ $\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ تكافئ $n=2k+1$

-3 لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

أ-نبيّن أن D مرجح النقط A ، B ، C مرفقة بمعاملات حقيقية يُطلب تعيينها :

لدينا $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و منه

$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي D مرجح $(A;1);(B;-1);(C;1)$

ب- تعيين z_D لاحقة D و z_I لاحقة I

$$z_D=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=-1-i \quad ، \quad z_D=\frac{z_B+z_C}{2}=-2+2i$$

ج- تعيين وانشاء المجموعة (φ) للنقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ و $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ و منه $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$

أي $MD=MI$ وبالتالي المجموعة (φ) هي مستقيم محور القطعة $[DI]$

-4 نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $z_E=1+5i$

أ- كتابة على الشّكل الجبري العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}$ ثم استنتاج أن $DE=2AI$ و (DE) يعامد (AI)

$\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}=-\frac{1}{2}i$ **و منه** $\left|\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}\right|=\left|-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ وبالتالي $\frac{|z_I-z_A|}{|z_D-z_E|}=\frac{AI}{ED}=\frac{1}{2}$ وبالتالي

$$\frac{|z_I-z_A|}{|z_D-z_E|}=ED=2AI$$

$\arg\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}=\arg(-\frac{1}{2}i)=\frac{\pi}{2}$ أي (DE) **يعامد** (AI)

ب- تعيين مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول D إلى I و يحول E إلى A :

$\begin{cases}S(D)=I\\S(E)=A\end{cases}$ و منه $\begin{cases}z_I=az_D+b\\z_A=az_E+b\end{cases}$ و منه $a=\frac{z_I-z_A}{z_D-z_E}$ و بالتالي $a=-\frac{1}{2}i$

و لدينا $z_A=-\frac{1}{2}z_E+b$ أي $b=z_A-\frac{1}{2}z_E=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}i$ و منه $z_\omega=\frac{b}{1-a}=-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}i$

ج- صورة الدّائرة التّي مركزها D وتشمل E بالتّشابه المباشر S : هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $r=\frac{1}{2}DE$

<u>التمرين الرّابع:(06 نقاط)</u>

لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2+2-2\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها :

$$\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2(1+\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x^2})=+\infty$$

الدالة المشتقة واشارتها $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$ **و منه** $g'(x)=\frac{2x^2-2}{x}$

$g'(x)=0$ معناه ومنه $x=-1$ مرفوض أو $x=1$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2. استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:من جدول التغيرات نستنتج أنّ $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$.

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x-1$

1) **حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ثم تفسير النتيجة هندسيا:**

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ التفسير هندسيا $x=0$ مستقيم مقارب عمودي

2) **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ التفسير $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل

- **دراسة وضعية (C_f) مع مستقيمه المقارب (Δ)**

ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(x-1)\right]$: $f(x)-(x-1)=\frac{2\ln x}{x}$ ، $\frac{2\ln x}{x}=0$ معناه $x=1$

و منه لما $x>1$ فإنّ (C_f) فوق (Δ)و لما $x<1$ فإنّ (C_f) أسفل (Δ)

3) **أ) نبيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.:**

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}+1=\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب) استنتاج إشارة f' ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

إشارة f' من إشارة g ولدينا $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$و منه $f'(x)>0$ على $\mathbb{R}$

- **جدول التغيرات**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4) نبيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T)موازيا للمستقيم(Δ)عند نقطة يطلب تعيين إحداثييها ثم أكتب معادلة لـ (T)

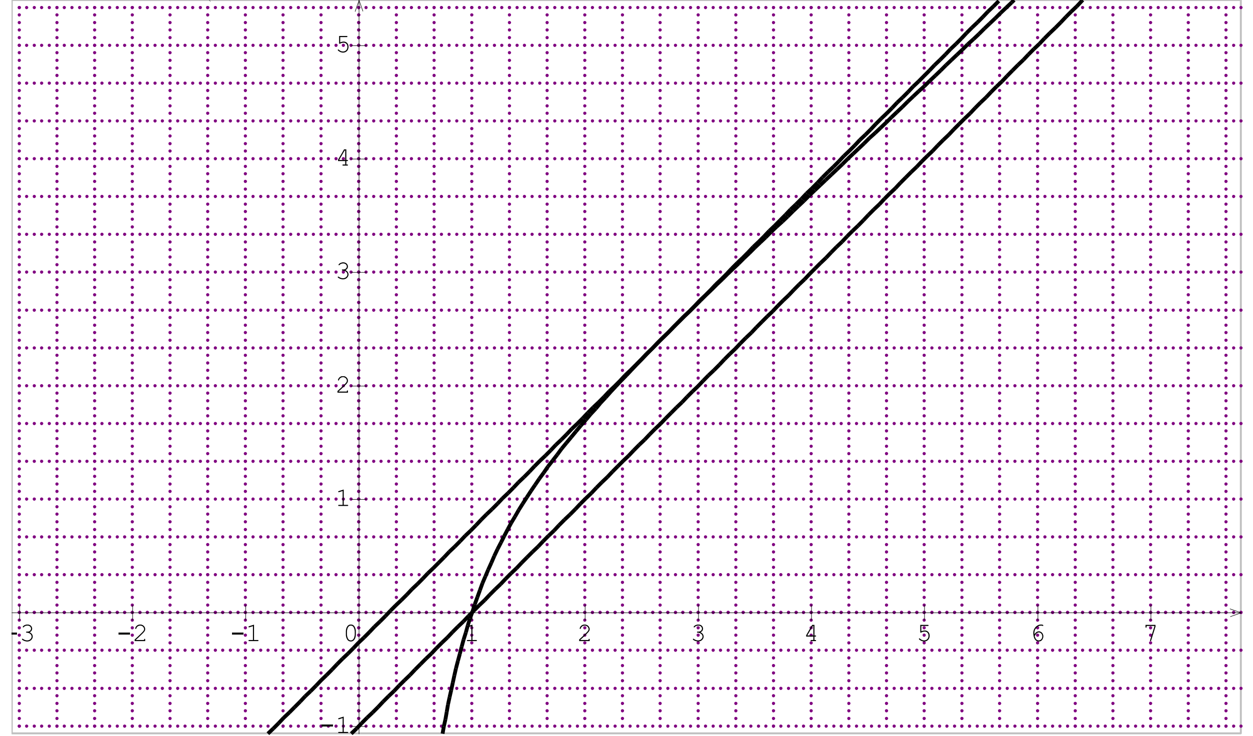
(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) معناه $f'(x)=1$ تكافئ $1=\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$ أي

$2-2\ln x+x^2=x^2$ وبالتالي $2-2\ln x=0$ و منه $\ln x=1$ أي $x=e$ أي $A(e;\frac{2}{e}+e-1)$

لأن $f(e)=\frac{2\ln e}{e}+e-1=\frac{2}{e}+e-1$.

معادلة لـ (T): $(T): y=1(x-e)+\frac{2}{e}+e-1$ و منه $(T): y=x+\frac{2}{e}-1$

5) أنشاء كلا من المستقيمين (Δ) و (T) ، ثمّ المنحنى (C_f):



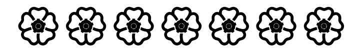
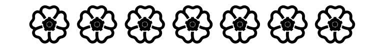
6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $2\ln x-xm=x$

$2\ln x-xm=x$ تكافئ $2\ln x=xm+x$ و منه $2\ln x=xm+x$ و منه

$2\ln x=x(m+1)$ أي $\frac{2\ln x}{x}=m+1$ و منه $\frac{2\ln x}{x}+x-1=m+1+x+1$ و بالتالي

$f(x)=x+m$ وبالتالي

- لما $m\leq\frac{2}{e}-1$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $m>\frac{2}{e}-1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

السنة الثالثة علوم تجريبية — المدة : 03 ساعات و 30 د

إختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (4pts):

لكل **سؤال** من الأسئلة التالية **جواب واحد صحيح** فقط. عين الجواب الصحيح **معللا إختيارك**.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر (P) المستوي ذي المعادلة $x-2y+3z+5=0$ ، (Q) المستوي ذي التمثيل الوسيطي $(\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-2+\alpha+2\beta\\y=-\alpha-2\beta\\z=-1-\alpha+3\beta\end{cases}$ ، (D) المستقيم ذي التمثيل الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-2+t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}$ ونعتبر النقطتين $A(-1,2,3)$ ، $B(1,-2,9)$.

1) تمثيل وسيطي للمستوي (P) هو :

أ) $\begin{cases}x=\alpha\\y=1-2\alpha\\z=-1+3\alpha\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=1-\alpha+\beta\\z=-1-\alpha\end{cases}$ جـ) $\begin{cases}x=\alpha+\beta\\y=1-\alpha-2\beta\\z=1-\alpha-3\beta\end{cases}$ د) $\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=1-2\alpha+2\beta\\z=-1-\beta\end{cases}$

2) أ) المستقيم (D) والمستوي (P) يتقاطعان في النقطة $C(-8,3,2)$. ب) المستقيم (D) والمستوي (P) متعامدان.
جـ) المستقيم (D) مستقيم من المستوي (P). د) المستقيم (D) والمستوي (P) متوازيان تماما.

3) أ) المستقيمان (AB) و (D) متعامدان. ب) المستقيمان (AB) و (D) متوازيان.
جـ) المستقيمان (AB) و (D) متقاطعان. د) المستقيمان (AB) و (D) متطابقان.

4) أ) المستويان (P) و (Q) متوازيان.
ب) المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t\\y=-2-t\\z=-3-t\end{cases}$.
جـ) النقطة $A(-1,2,3)$ تنتمي إلى تقاطع (P) و (Q) . د) المستويان (P) و (Q) متعامدان.

التمرين الثاني (6pts):

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) g دالة معرفة على المجال $]-\infty,+\infty[$ بـ : $g(x)=x+1-e^{x}$.
أدرس تغيرات الدالة g . استنتج أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\le 0$

2) f دالة معرفة على المجال $]-\infty,+\infty[$ بـ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$. نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f .

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$. بملاحظة أن: $f(x)=\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)x^2e^{-x}$ ، أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=(2x^2-3x-2)e^{-x}$ ، عين إشارة $f'(x)$.
عين جدول تغيرات الدالة f

3) أ) عين معادلة لـ (T) مماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
ب) بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-(-2x+1)=(1-2x)g(x)e^{-x}$. استنتج وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

4) أ) أدرس تقاطع (C) و محور الفواصل.
ب) أرسم (T) و (C) على المجال $]-1,+\infty[$.

5) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.
عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين الثالث (5pts):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2) A ، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$. C منتصف القطعة $[OB]$ لاحقتها z_C.

أ) أكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي .

ب) أحسب OA ، OB ، AB . استنتج طبيعة المثلث OAB .

3) نسمي D صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. و نسمي E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.

أ) بين أن لاحقة النقطة E هي $z_E=\frac{1}{2}\left[1+(4-\sqrt{3})i\right]$.

ب) بين أن $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

4) بين أن A ، C ، E في استقامية .

التمرين الرابع (5pts):

1) لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln x$.

أدرس تغيرات الدالة f .

2) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n=\frac{e^n}{n^n}$.

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيرها ونهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$.

أ) أثبت أن: $v_n=n-n\ln(n)$.

ب) باستعمال الدالة f ، أدرس إتجاه تغير (v_n) ثم استنتج أن (u_n) متناقصة.

جـ) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0<u_n\le e$.

د) استنتج أن (u_n) متقاربة وعين نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5pts):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2,0,1)$ ، $B(1,2,-1)$ ، $C(-2,2,2)$.

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم عين قيمة مقربة إلى الدرجة للزاوية $\widehat{BAC}$.

ب) استنتج أن النقط A ، B ، C تعين مستويا (P) حيث $\vec{n}(2,-1,2)$ شعاع ناظمي له . عين معادلة لـ (P) .

2) (P_1) و (P_2) المستويان ذا المعادلتين $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$ على الترتيب.

أ) بين أن (P_1) و (P_2) متقاطعين وفق مستقيم (Δ) حيث: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$ تمثيل وسيطي له.

ب) أدرس تقاطع (P) و (Δ).

3) (S) سطح الكرة ذي المركز $\Omega(1,-3,1)$ ونصف القطر 3.

أ) عين معادلة لـ (S) .

ب) أدرس تقاطع (S) و (Δ) .

جـ) بين أن (P) مماس لـ (S).

التمرين الثاني (6pts):

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$)

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

ولتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$. نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج أشارة $g(x)$.

2) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$. فسر النتيجة بيانيا. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ ، استنتج عندئذ إشارة $f'(x)$.عين جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $+\infty$ معادلته $y = \dfrac{1}{2}x$. حدد وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ).

5) أحسب $f(1)$. أنشئ (Δ) و (C).

6) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ حيث $F(1) = \dfrac{5}{4}$.

التمرين الثالث (5pts):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. نسمي I النقطة ذات اللاحقة $z_I = 1$.

1) A ، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_A = 1 - 2i$ ، $z_B = -2 + 2i$. الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$.
عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة (C) وعين نصف قطرها.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$. أكتب z_D على الشكل الجبري ثم بين أن D نقطة من (C).

3) E نقطة من (C) حيث $\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

عين طويلة $z_E + \dfrac{1}{2}$ وعمدة له. استنتج أن $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4) R التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث:
$z' + \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$.

أ) عين طبيعة التحويل R محددا عناصره المميزة .

ب) ما هي صورة النقطة F ذات اللاحقة $z_F = 2$ بالتحويل R.

التمرين الرابع (4pts):

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب) بين أن (u_n) متناقصة .

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

2) (w_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln u_n$.

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب) نضع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. بين أن $S = w_0 - w_{n+1}$. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S$.

متمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا وعطلة سعيدة!

تصحيح الموضوع الأول:

تصحيح التمرين الأول:

1)الجواب الصحيح هو **ب** حيث

$\alpha+2\beta-2(1-\alpha+\beta)+3(-1-\alpha)+5=0$

2)الجواب الصحيح هو **جـ** حيث

$-2+t-2(-t)+3(-1-t)+5=0$

3)الجواب الصحيح هو **أ** حيث $\vec{u}\bullet\overrightarrow{AB}=$ $\vec{u}(1,-1,-1)$.

4)الجواب الصحيح هو **ب** حيث $t-2(-2-t)+3(-3-t)+5=0$

و $\begin{cases} t=-2+\alpha+2\beta \\ -2-t=-\alpha-2\beta \\ -3-t=-1-\alpha+3\beta \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \beta=-\frac{1}{5} \\ \alpha=\frac{12}{5}+t \end{cases}$.

تصحيح التمرين الثاني:

1) $g'(x)=1-e^x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\le 0$

2)أ)لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(C) يقبل مستقيم مقارب عند $+\infty$ معادلته $y=0$.

ب) $f'(x)=(-4x-1)e^{-x}-(-2x^2-x+1)e^{-x}=(2x^2-3x-2)e^{-x}$

$f(2)=-9e^{-2}$

معادلة المماس:

$y=-2x+1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\sqrt{e}$	↘	$f(2)$	↗	0

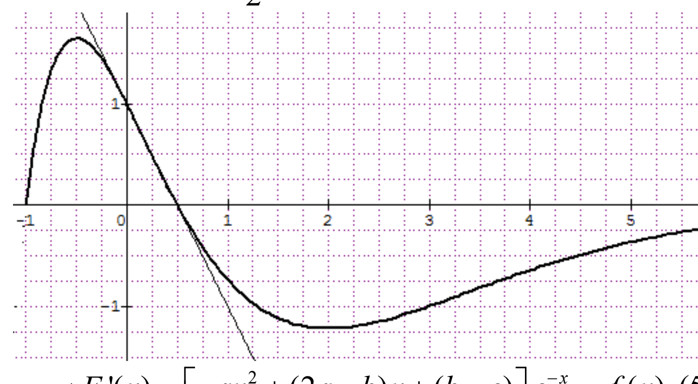
$f(x)-(-2x+1)=(-2x+1)(x+1)e^{-x}-(-2x+1)$

$=(-2x+1)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]=(-2x+1)\left[(x+1)-e^{x}\right]e^{-x}$

$=(-2x+1)g(x)e^{-x}$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$-$		$-$	
$f(x)-(-2x+1)=$ $=(-2x+1)g(x)e^{-x}$		$-$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) تحت (T)		(C) تحت (T)		(C) فوق (T)	

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\frac{1}{2}$ و -1



5) $f(x)=F'(x)=\left[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right]e^{-x}$ ،

بالمطابقة نجد: $a=$ $b=$ $c=4$

تصحيح التمرين الثالث:

1) $\Delta=-4=(2i)^2$ ، حلي المعادلة: $\sqrt{3}-i$ ، $\sqrt{3}+i$

2)أ) $z_A=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=\frac{z_O+z_B}{2}=\frac{z_B}{2}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) $OA=OB=2$ ، $AB=|z_B-z_A|=|2i|=2$ ،

OAB مثلث متقايس الأضلاع.

3)أ) لدينا: $\begin{cases} OD=OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\frac{z_D}{z_C}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ أي $z_D=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ولدينا: $\overrightarrow{DE}=2\vec{j}$ ، ومنه $z_E-z_D=2i$ ، $z_E=\frac{1}{2}\left[1+(4-\sqrt{3})i\right]$.

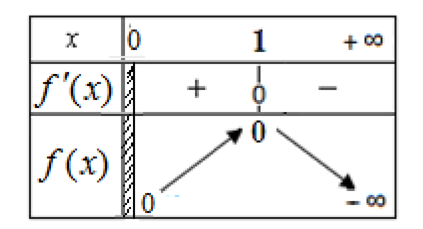
ب) $OE=|z_E|=\frac{1}{2}\sqrt{20-8\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{4(5-2\sqrt{3})}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

$BE=|z_E-z_B|=\left|\frac{1}{2}(1-2\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})i\right|=\frac{1}{2}\sqrt{20-8\sqrt{3}}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

4) $OE=BE$ معناه: نقطة من محور $[OB]$ ، وبما أن المثلث متقايس الأضلاع فإن نقطة من محور $[OB]$، ولدينا منتصف $[OB]$، وبالتالي A ، C ، E في استقامية .

تصحيح التمرين الرابع:

1) $f'(x)=-\ln x$



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	0	↘	$-\infty$

2) $u_1=e\approx 2,71$ ، $u_2=\frac{e^2}{4}\approx 1,85$ ، $u_3=\frac{e^3}{27}\approx 0,74$ ،

$u_2=\frac{e^4}{256}\approx 0,21$ ، $u_5=\frac{e^5}{3125}\approx 0,05$ ، متناقصة ونهايتها 0.

3) أ) $v_n=\ln u_n=\ln\frac{e^n}{n^n}=\ln e^n-\ln n^n=n-n\ln n$.

ب) $v_n=f(n)$ و الدالة f متناقصة على المجال $[1,+\infty[$ وبالتالي (v_n) متناقصة. وبما أن $u_n=e^{v_n}$ والدالة الأسية متزايدة فإن إتجاه تغير (u_n) هو إتجاه تغير (v_n) أي (u_n) متناقصة.

جـ) بما أن (u_n) متناقصة فإن $u_n\le u_0=e$ ولدينا $e^n>0$ و $n^n>0$ وبالتالي $0<u_n$ أي $0<u_n\le e$.

د) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة. ولدينا $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} f(n)=-\infty$ أي $\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=-\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1) أ) $\overrightarrow{AB}(3,2,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$ ، لدينا $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=2$.

$\widehat{BAC}=\frac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}\approx$ $\widehat{BAC}\approx 77°$.

ب) لدينا $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\neq k\pi$ ومنه A ، B ، C ليست في استقامية.

وهي تعين مستويا (P) معادلته: $(P): 2x-y+2z+2=0$.

2) لدينا $\overrightarrow{n_1}(1,1,-3)$ شعاع ناظمي لـ (P_1) ، $\overrightarrow{n_2}(1,-2,6)$ شعاع ناظمي لـ (P_2) ، و بما أن $\overrightarrow{n_1}$ لا يوازي $\overrightarrow{n_2}$ فإن (P_1) و (P_2) متقاطعين

وبوضع $z=t$ يكون $\begin{cases}x+y-3t+3=0\\x-2y+6t=0\end{cases}$ ونجد $\begin{cases}x=-2\\y=-1+3t\\z=t\end{cases}$

ب) $2(-2)-(-1+3t)+2t+2=0$ معناه $t=-1$ ومنه (Δ) يقطع (P) في النقطة ذات الاحداثيات $(-2,-4,-1)$

3) أ) $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

ب) $(-2-1)^2+(-1+3t+3)^2+(t-1)^2=9$ معناه $10t^2+10t+5=0$ ، $\Delta=-100<0$ ، إذن: $(S)\cap(\Delta)=\varnothing$

جـ) $d(\Omega,P)=\frac{|2+3+2+2|}{\sqrt{4+4+1}}=3=R$ ، إذن (P) مماس لـ(S) .

تصحيح التمرين الثاني:

1) $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$

من $=\frac{2x^2-2}{x}$

$=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

أجل $g(x)>0 : x>0$

2) $\lim_{x\to0^{>}} f(x)=-\infty$ ، (C) يقبل م.م معادلته $x=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{4x^2-2x^2+2}{4x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}>0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}-\frac{1}{2}x\right]$

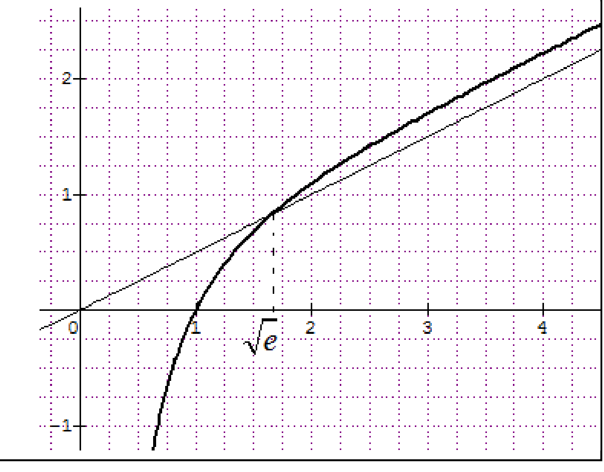
$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right]=0$

(C) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=\frac{1}{2}x$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2\ln x-1}{2x}$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C) تحت (Δ)		(C) فوق (Δ)

6) لدينا $f(x)=\frac{1}{x}\ln x+\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$ ومنه

$F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}+k$ وبما أن $F(1)=\frac{5}{4}$ نجد $k=1$



تصحيح التمرين الثالث:

1) $z_\Omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-1}{2}$ ، نصف القطر: $\frac{AB}{2}=\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{5}{2}$

2) $z_D=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ ، $\Omega D=|z_D-z_\Omega|=\frac{5}{2}$ ومنه $D\in(C)$

3) $\left|z_E+\frac{1}{2}\right|=|z_E-z_\Omega|=\Omega E=\frac{5}{2}$ ، لأن E نقطة من (C).

$(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})=\frac{\pi}{4}$ معناه $Arg\left(\frac{z_E-z_\Omega}{z_I-z_\Omega}\right)=\frac{\pi}{4}$ وبالتالي:

$Arg(z_E-z_\Omega)-Arg\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ومنه $Arg\left(z_E+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

لأن $Arg\left(1+\frac{1}{2}\right)=0$ إذن $z_E+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

وبالتالي $z_E=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

4) لدينا $z'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M-z_\Omega}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي

$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ ومنه R دوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه Ω .

ب) لاحقة صورة النقطة F بـ R هي z' حيث $z'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(2+\frac{1}{2}\right)$

أي $z'=\frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}=z_E$ وبالتالي صورة النقطة F بـ R هي E .

تصحيح التمرين الرابع:

1) لدينا $u_0=1$ أي $u_0>0$ وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$. نفرض صحة هذه الخاصية من أجل $n\geq 0$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نفرض صحة $u_n>0$ ونبرهن صحة $u_{n+1}>0$

- لدينا $u_n>0$ و $e^{-u_n}>0$ و منه $u_ne^{-u_n}>0$ أي $u_{n+1}>0$ .....
- $u_{n+1}-u_n=u_ne^{u_n}-u_n=u_n(e^{u_n}-1)<0$ لأن $u_n>0$ معناه $e^{u_n}>1$ أي $e^{u_n}-1<0$ ، وبالتالي (u_n) متناقصة
- بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$ ، العدد l يحقق $l=le^{-l}$ أي $l(1-e^{-l})=0$ ، $l=0$

2) $w_n-w_{n+1}=\ln u_n-\ln u_ne^{-u_n}=\ln u_n-(\ln u_n-u_n)=u_n$

$S=(w_0-w_1)+(w_1-w_2)+\ldots+(w_n-w_{n+1})=w_0-w_{n+1}$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}w_n=-\infty$ ، إذن

$\lim_{n\to+\infty}S=\lim_{n\to+\infty}(w_0-w_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=+\infty$ ..

تمنياتي لكم بالنجاح في البكالوريا وعطلة سعيدة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **مديرية التربية لولاية ورقلة**

امتحان تجريبي شهادة بكالوريا التعليم الثانوي — **ثانويات تقرت**

الشعبة : علوم تجريبية — **دورة ماي 2016**

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 03 ساعات ونصف**

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقطة $A(-1;2;3)$ والمستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t ; t\in\mathbb{R} \\ z = 2+2t \end{cases}$.

1 ـ أ)ـ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على (Δ) والمار من A .

ب) ـ تحقق من أن النقطة $B(-3;3;-4)$ تنتمي إلى (Δ) .

جـ)ـ أحسب المسافة d_B بعد النقطة B عن المستوي (P) .

2ـ عبر عن المسافة d بين A والمستقيم (Δ) بدلالة d_B والمسافة AB ثم استنتج قيمة d .

3ـ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) . عبر عن AM^2 بدلالة t ثم أوجد قيمة d بطريقة ثانية.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- احسب u_2 , u_1

2- ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \prec u_n \prec 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة , مادا تستنتج ؟

3.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{\to} u_n$

2) 4- احسب بدلالة n كلا من :و $S_n = v_0 + v_1 + ...v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times ....u_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ ذو المتغير المركب z حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1) أحسب $P(2)$ ثم أوجد تحليلا لـ $P(z)$.

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$ ، نسمي z_1 و z_2 الحلين المختلفين عن 2 حيث z_1 جزؤه التخيلي موجب

3) أ/ تحقق أن : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ ثم أكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

---

4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)
نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : 2 ، z_1 و z_2 ولتكن I منتصف $[AB]$
أ)ــ علم النقط A ، B ، C و I .
ب)ــ ما طبيعة المثلث OAB واستنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OI})$.
جـ)ــ احسب z_I لاحقة I ثم اكتب z_I على الشكل الأسي .
د)ــ باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

<u>التمرين الرابع : (07نقط)</u>

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بــ : $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. ا/ أتبث أنه من أجل كل عدد حقيقي x, $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)

2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x , $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

ب/ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها
4. ارسم (D) و (D') و (C)
5. نضع : $I=\int_2^3[f(x)-x]\,dx$

-1 فسر هندسيا العدد I
-2 بين أنه من اجل كل x من $[0,+\infty[$, $\ln(1+x)\le x$
-3 أستنتج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

التمرين الأول(4 نقاط)

$A(-1,2,3)$ و $(\Delta):\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t....t\in\Re \\ z=2+2t \end{cases}$

1)أ) إيجاد معادلة المستوى (P) : لدينا $(\Delta)\perp(P)$ ومنه

$\vec{u}_\Delta(4;1;2)$ شعاع توجيه (Δ) ناظمي للمستوى (P) (1)

معادلته: $4x+y+2z+d=0$

$A(-1,2,3)\in(P)$ أي: $-4+2+6+d=0$ أي: $d=-4$

$$\boxed{(P):4x+y+2z-4=0}$$

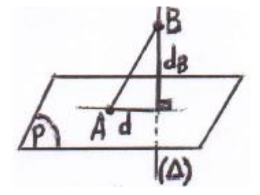
ب) التحقق أن $B(-3,3,-4)$ **تنتمي إلى** (Δ) : (0.5)

$(\Delta):\begin{cases} -3=9+4t \\ 3=6+t \\ -4=2+2t \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} t=-3 \\ t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$ t وحيدة ، $B\in(\Delta)$

ج)حساب المسافة d_B بين B و (P) : (0.5)

لدينا: $d_B=\dfrac{|-12+3-8-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{21}}=\dfrac{21\sqrt{21}}{21}=\sqrt{21}$

2)حساب المسافة d بين A و (Δ) :



$AB^2=d^2+d_B^2$

$d^2=AB^2-d_B^2$

$\boxed{d=\sqrt{AB^2-d_B^2}}$ (0.5)

$AB=\sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{54}$

$d=\sqrt{54-21}$ نجد $\boxed{d=\sqrt{33}}$ (0.5)

3)التعبير عن AM^2 بدلالة t :

$M\in(\Delta)$ ومنه $M(9+4t;6+t;2+2t)$

$AM=\sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$AM=\sqrt{(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2}$

$AM=\sqrt{16t^2+80t+100+t^2+8t+16+4t^2-4t+1}$

$AM=\sqrt{21t^2+84t+117}$ (0.5)

$\boxed{AM^2=21t^2+84t+117}$

نضع : $f(t)=21t^2+84t+117$

لندرس اتجاه تغير f : $f'(t)=42t+84$

$42t+84=0$ **نجد** $t=-2$

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	33	↗ $+\infty$

من أجل $t=-2$ الطول AM أصغر ما يمكن

$AM^2=f(-2)=33$ (0.5)

$AM=\sqrt{33}$ ومنه : $d=\sqrt{33}$

التمرين الثاني (4) نقاط)

$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{4U_n} \end{cases}$

1)حساب u_1,u_2 :

$U_1=\sqrt{4U_0}=\sqrt{4}=2$ (0.5)

$U_2=\sqrt{4U_1}=\sqrt{8}$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

* من اجل $n=0$: $0\prec U_0=1\prec 4$ ($P(0)$ محققة)

*نفرض أن $0\prec U_n\prec 4$ صحيحة و نبين أن: $0\prec U_{n+1}\prec 4$

لدينا : $0\prec U_n\prec 4$ ومنه: $0\prec 4U_n\prec 16$

إذن: $\sqrt{0}\prec\sqrt{4U_n}\prec\sqrt{16}$ (0.5)

وبالتالي: $0\prec U_{n+1}\prec 4$

إذن $p(n+1)$ صحيحة

*الاستنتاج : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

ب) إتجاه تغير المتتالية (U_n)

$U_{n+1}-U_n=\sqrt{4U_n}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{(\sqrt{4U_n}-U_n)(\sqrt{4U_n}+U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{4U_n-U_n^2}{\sqrt{4U_n}+U_n}=\dfrac{U_n(4-U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

لدينا : $U_n\prec 4$ ومنه: $4-U_n\succ 0$ (0.5)

و لدينا : $U_n\succ 0$ ومنه: $\sqrt{4U_n}+U_n\succ 0$

ومنه: $U_{n+1}-U_n\succ 0$ إذن : (U_n) متزايدة (0.25)

الاستنتاج: (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n=\ln(U_n)-\ln 4$

لدينا : $V_{n+1}=\ln(U_{n+1})-\ln 4$

$V_{n+1}=\ln(\sqrt{4U_n})-\ln 4$

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$, $a\succ 0$

$V_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(4U_n)-\ln 4$

$\ln ab=\ln a+\ln b$, $a\succ 0, b\succ 0$

$V_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln 4+\dfrac{1}{2}\ln(U_n)-\ln 4$

$V_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(U_n)-\dfrac{1}{2}\ln 4$

$V_{n+1}=\dfrac{1}{2}[\ln(U_n)-\ln 4]$ (0.5)

$\boxed{V_{n+1}=\dfrac{1}{2}V_n}$ (V_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$

و حدها الأول $V_0=\ln(U_0)-\ln 4$ **نجد** $\boxed{V_0=-\ln 4}$

ب) عبارة V_n : $V_n = V_0 \times q^n$

0.25 $V_n = (-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

عبارة U_n : $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$

نجد $\ln(U_n) = V_n + \ln 4$ $\quad U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$U_n = e^{v_n}\times e^{\ln 4}$

0.25 $U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$ (لأن : $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

4) حساب: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

نجد $S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ $\quad S_n = (-\ln 4)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$

0.5 $S_n = (-2\ln 4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$S_n = 4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

حساب: $P_n = U_0 \times U_1 \times .... \times U_n$

لدينا: $U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$P_n = e^{v_0+\ln 4}\times e^{v_1+\ln 4}\times ......\times e^{v_n+\ln 4}$

$P_n = e^{(v_0+v_1+.....v_n)+\underbrace{(\ln 4+\ln 4+...+\ln 4)}_{(n+1)\text{ حد}}}$

0.5 $P_n = e^{(S_n)+(n+1)\ln 4}$

$P_n = e^{4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)\ln 4}$

التمرين الثالث(5نقاط)

$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$

(1 0.25 $P(2) = 0$

$P(Z) = (Z-2)(aZ^2 + bZ + c)$

$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$

$P(Z) = aZ^3 + (b-2a)Z^2 + (c-2b)Z - 2c$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2\sqrt{2} - 2 \\ c - 2b = 4 - 4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases}$

0.5 $P(Z) = (Z-2)(Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4)$

(2 $P(Z) = 0$

$Z = 2$ أو $Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$

$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$

$Z = \frac{-2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ أو $Z = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

0.5 $Z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ و $Z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(3 0.25 $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$

الشكل الأسي: $Z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ إذن 0.5 $Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$Z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ و $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ إذن 0.5 $Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

4) أ/ إنشاء النقط: 0.5

ب) طبيعة المثلث OAB :

لدينا : $|Z_A| = |Z_B| = 2$ نجد $OB = OA = 2$ 0.25

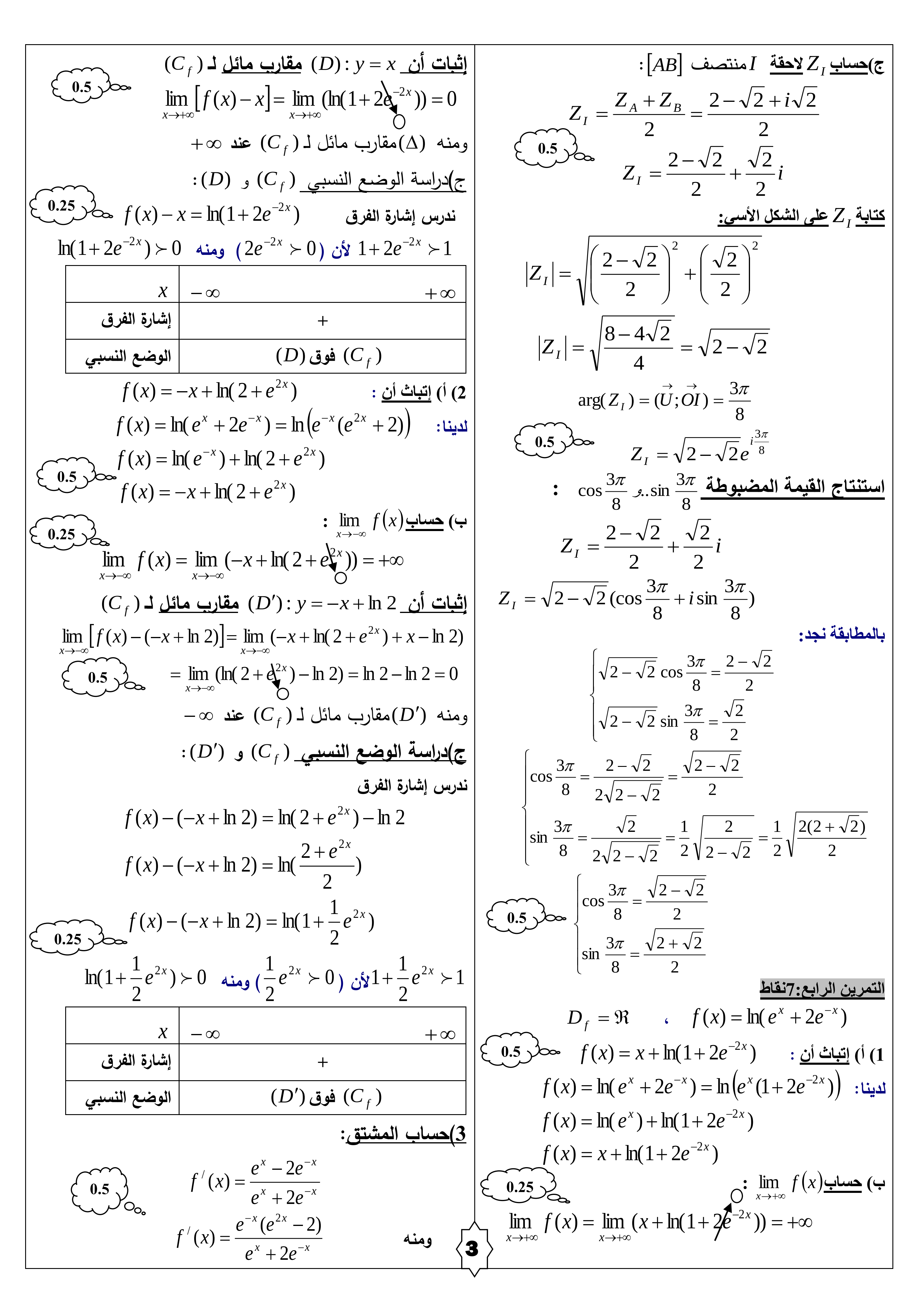
OAB متقايس الضلعين

قيس $(\vec{U};\vec{OI})$: $\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2} = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ نجد $(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

0.5 $(\vec{U};\vec{OI}) = \frac{(\vec{OA};\vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$

لأن $[OI)$ منصف الزاوية $((\vec{OA};\vec{OB}))$



ج) **حساب** Z_I **لاحقة** I منتصف $[AB]$:

$$Z_I=\frac{Z_A+Z_B}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة Z_I **على الشكل الأسي:**

$$|Z_I|=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I|=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I)=(\vec{U};\vec{OI})=\frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة $\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$:

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}}\end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

التمرين الرابع:7نقاط

$D_f=\Re$ ، $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$

1) أ) **إثبات أن** : $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$ 0.5

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^x(1+2e^{-2x})\right)$

$$f(x)=\ln(e^x)+\ln(1+2e^{-2x})$$

$$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$$

ب) **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln(1+2e^{-2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D): y=x$ **مقارب مائل لـ** (C_f) 0.5

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+2e^{-2x}))=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) **عند** $+\infty$

ج) **دراسة الوضع النسبي** (C_f) و (D):

0.25

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln(1+2e^{-2x})$

لأن $1+2e^{-2x}\succ1$ $(2e^{-2x}\succ0)$ **ومنه** $\ln(1+2e^{-2x})\succ0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة الفرق	+
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (D)

2) أ) **إثبات أن** : $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^{-x}(e^{2x}+2)\right)$

0.5

$$f(x)=\ln(e^{-x})+\ln(2+e^{2x})$$

$$f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$$

ب) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D'): y=-x+\ln 2$ **مقارب مائل لـ** (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)]=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x})+x-\ln 2)$$

0.5

$$=\lim_{x\to-\infty}(\ln(2+e^{2x})-\ln 2)=\ln 2-\ln 2=0$$

ومنه (D') مقارب مائل لـ (C_f) **عند** $-\infty$

ج) **دراسة الوضع النسبي** (C_f) و (D'):

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln(2+e^{2x})-\ln 2$$

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

لأن $1+\frac{1}{2}e^{2x}\succ1$ $(\frac{1}{2}e^{2x}\succ0)$ **ومنه** $\ln(1+\frac{1}{2}e^{2x})\succ0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة الفرق	+
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (D')

3) **حساب المشتق:**

0.5

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-2)}{e^x+2e^{-x}}$

اشارة المشتق:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x}-2$

لأن ($e^{-x} \succ 0$ و $e^{x}+2e^{-x} \succ 0$)

$e^{2x}-2 \geq 0$ نجد $e^{2x} \geq 2$

$2x \geq \ln 2$ نجد $x \geq \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x}-2 \leq 0$ نجد $x \leq \frac{\ln 2}{2}$ (0.5)

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f متناقصة على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

2) **جدول تغيرات** f : (0.5)

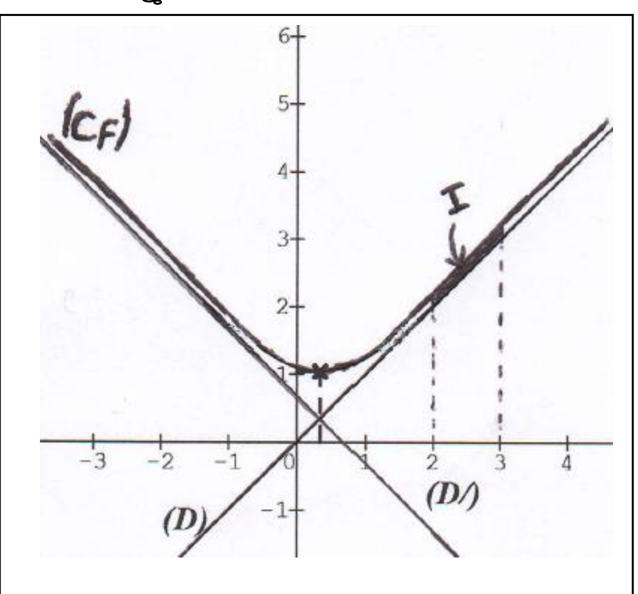
x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗	$+\infty$

$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln(1+2e^{-\ln 2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln 2$

$f(\frac{\ln 2}{2})=\frac{3\ln 2}{2}$

4) **رسم** : (C_f) ، (D) ، (D') (0.75)



5) **نضع** : $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx$

1) I المساحة المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيمات (0.25)

$x=2$ و $x=3$ و $(D): y=x$

2) **إثبات أنه من أجل** $x \in [0;+\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$:

نضع : $g(x)=\ln(1+x)-x$

$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$

لدينا من أجل $x \geq 0$: $g'(x) \leq 0$

g متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ (فهي تعكس الترتيب)

من أجل $x \geq 0$: $g(x) \leq g(0)$ ولدينا $g(0)=0$

$\ln(1+x)-x \leq 0$

$\ln(1+x) \leq x$ (0.5)

3) **إستنتاج أن** $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx=\int_2^3 (x+\ln(1+2e^{-2x})-x)dx$

$I=\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx$

$1+2e^{-2x} \succ 1$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x}) \succ 0$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx \geq 0$ إذن $(1).....I \geq 0$

لدينا $2e^{-2x} \succ 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1+2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إذن $(2)....I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

من (1) و (2) نجد $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$ (0.75)

إيجاد حصرا للعدد I سعته 0,02 : $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^3=-e^{-6}+e^{-4} \approx 0.01583...$

ومنه: $0 \leq I \leq (e^{-4}-e^{-6})$

$0 \leq I \leq 0,02$ (0.25)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الثانويات: **زريمش عيسى(م.حمام دباغ)– بن يوب محمد(ثا.حمام دباغ)**

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — هواري بومدين(عين احساينية)– غجاتي علاوة (الركنية) – قالمة

الشعبة : رياضي و تقني رياضي — **دورة : ماي 2017**

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة: 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر المستقيمين (d)و (d')المعرفين كمايلي:

$$(d): x-2=\frac{y-1}{2}=1-z \quad ، \quad (d'):\begin{cases} x=4+3t' \\ y=3+t' \quad ;t'\in\mathbb{R} \\ z=3+2t' \end{cases}$$

1) أكتب التمثيــل الوسيطي للمستقيم (d) ، ثم بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي.

2) أ*/ أوجد المعــادلة الديكــارتية للمستويين (p_1) و(p_2) اللذين يشملان النقطة $A(4;-7;5)$.

حيث المستوي (p_1) يحوي المستقيم(d) و المستوي (p_2) يحوي المستقيم (d') .

ب*/ تحقق أن المستويين(p_1)و(p_2)متقاطعان وفق مستقيم(Δ)معرف بــ: $(\Delta):\begin{cases} x=\frac{-1}{11}+9\alpha \\ y=3-22\alpha \quad ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=11\alpha \end{cases}$

3) لتكــن $B\left(\frac{-1}{11};3;0\right)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (Q) ذو المعادلة: $11x+y-z=2$.

أ*/ أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q).

ب*/ استنتج المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على المستوي (Q).

4) (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

*/ عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقــاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0=8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليــكن Sالتشابــه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبتـــه $\frac{1}{2}$ و زاويتـــه $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتــالية النقـــط(B_n) كمـــايلي : $B_{n+1}=S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

1) أنشئ النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ*/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب*/ أكتب عبارة u_n بدلالة n.

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n\to+\infty} \delta_n$

4) أ*/ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 4y = 2$

ب*/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

*جد قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

<u>التمرين الثالث:</u> (05 نقـــاط)

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$(E)... \overline{z}^3 - 3\overline{z}^2 + 3\overline{z} + 7 = 0$ ، $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z .

أ*/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2 - 4\overline{z} + 7) = 0$.

ب*/ حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها

على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ*/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا ســالبا .

ب*/ عين طبيعة المثلث ABC .

3) أ*/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب*/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

*/ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ*/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب*/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \leq 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

جـ*/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

التمرين الرابع:(07 نقــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلها البيــاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**<u>أنظر الملحق</u>**)

أ*/ أحسـب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ*/ بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيــث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f) . **(الملحــق يعــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)....f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$

5) أ*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x [f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$

ب*/ ليكن العدد λ من المجـال $]0;1[$ ،

$A(\lambda)$ مســاحة الحيز المستوي المحــدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=\lambda$ و $x=1$.

* استنتــج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احســب $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\to} 0} A(\lambda)$.

<u>انتهى الموضوع الأول</u>

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(04 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;1;0)$، $B(1;2;0)$، $C(3;2;1)$

و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب ، (Q) مستوي معرف بـ: $\begin{cases} x = 2-2\alpha+\beta \\ y = \frac{3}{2}-4\alpha+2\beta \; ; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z = -5\alpha \end{cases}$

1) أ/* أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $Cos\widehat{ABC}$ و $Sin\widehat{ABC}$.

ب/* أحسب مساحة المثلث ABC .

ج/* بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكــارتية له .

د/* بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمـه : $V = \frac{2m+5}{6}uv$

2) أ/* بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية : $-2x+y=\frac{-5}{2}$.

ب/* استنتج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلـه الوسيـــطي.

ج/* أحسب $d(D;(Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

أ/* بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب/*عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m).

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m).

التمرين الثاني:(04 نقــاط)



1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ/* أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب/* استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ/* عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب/*عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج/* استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ/* بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب/* استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثالث: (05 نقــاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o\ ;\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = 1-i$ و $z_B = 2+\sqrt{3}+i$.

أ*/ اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب*/ بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج*/هل تـوجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3) أ*/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب*/ احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$.   (مقـدرة بوحدة المساحة)

ج*/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د*/ عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4) نضــع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ*/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ب*/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ*/ إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب*/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x) = x - e + \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1\ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le\ln 2$

ج*/ عين اتجـاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in\left]0;+\infty\right[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}\,dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

انتهى

الموضوع الثاني

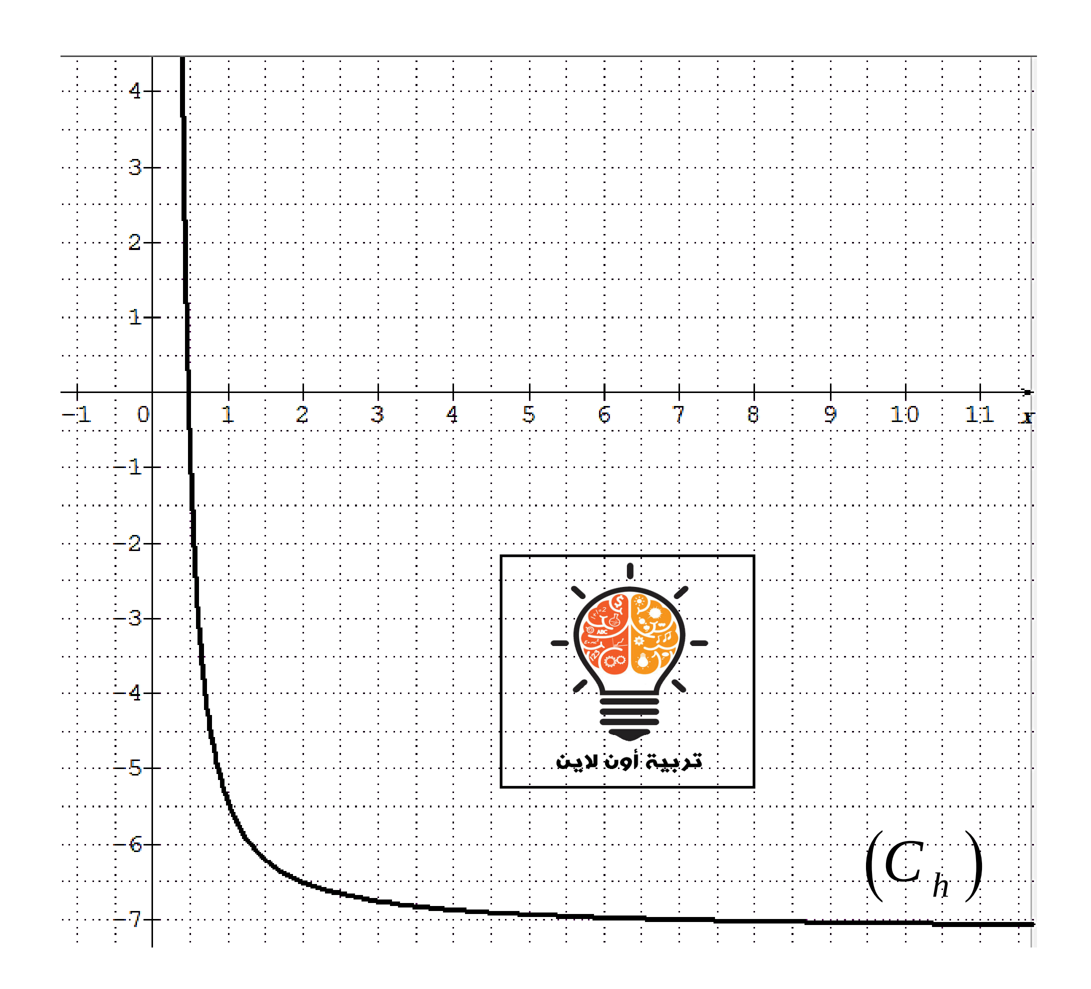
بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

الملحق:

الاسم :.........

اللقب : ....

القسم :........

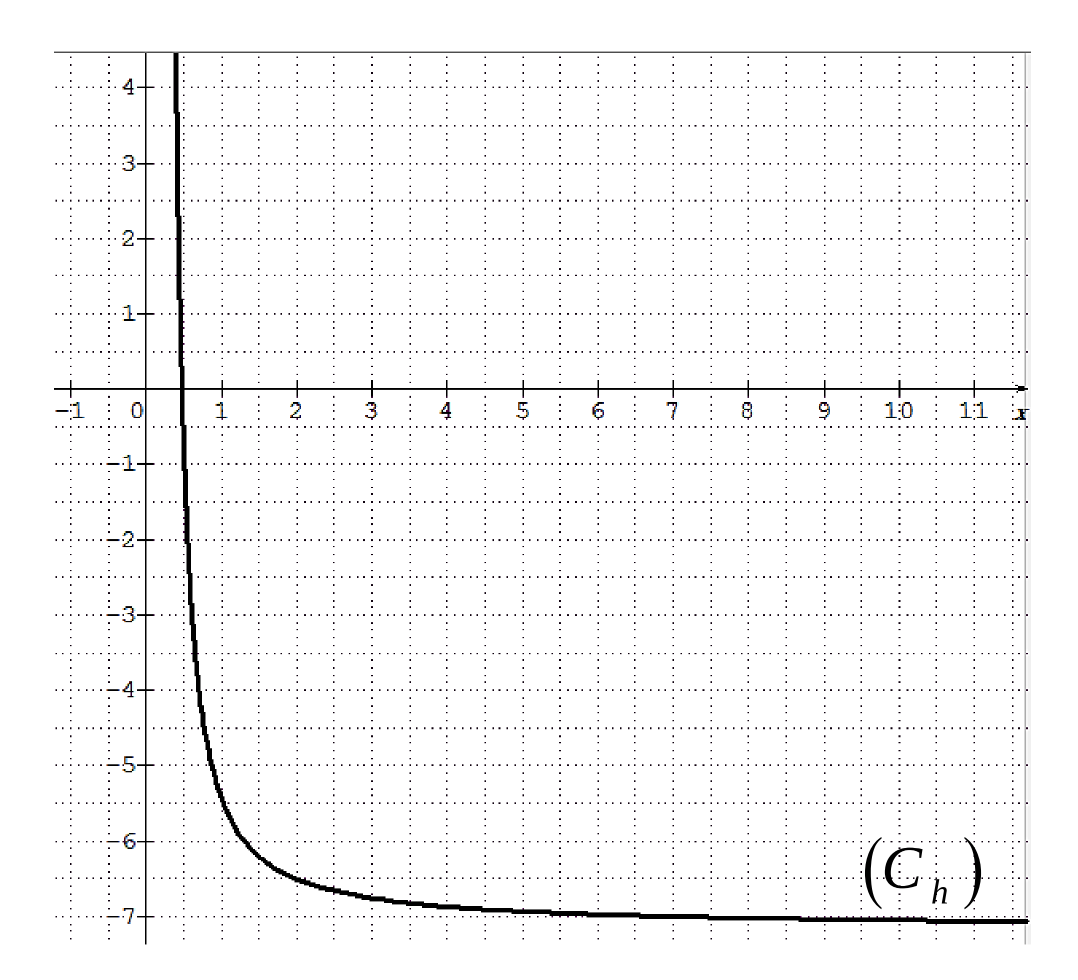


الملحق:

الاسم :.............

اللقب : ....

القسم : ....



تصحيح البكالوريا التجريبي 2017 رياضي وتقني رياضي

الموضوع الاول: **التمرين الأول:(04 نقاط)**

1) كتابة التمثيل الوسيطي (d): t وسيط حقيقي

أي أن: $x-2=\frac{y-1}{2}=1-z=t$ ومنه: $(d):\begin{cases}x-2=t\\ \frac{y-1}{2}=t\ ;t\in\mathbb{R}\\ 1-z=t\end{cases}$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) هو $\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=-t+1\end{cases}$

/* تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:

$\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d)، $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{3}$ فإن الشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ و $\vec{u}'(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x;y;z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي:

نبحث عن الثنائية (t,t') $\begin{cases}x=t+2=3t'+4...(1)\\ y=2t+1=t'+3...(2)\ ;(t,t')\in\mathbb{R}^2\\ z=-t+1=2t'+3...(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (3): $t'=\frac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t=\frac{-2}{5}$ ، الثنائية $\left(\frac{-2}{5},\frac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوى

2) أ) ايجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p_1) و (p_2)

ويشملان $A(4;-7;5)$ و $(d)\subset(P_1)$ و $(d')\subset(P_2)$

تعيين معادلة المستوى (p_1): (p_1) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overrightarrow{AD}(-2;8;-4)$ حيث $D(2;1;1)$ نقطة من (d)

ليكن: $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (p_1) غير معدوم

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a+2b-c=0\ \ ...(1)\\ -2a+8b-4c=0..(2)\end{cases}$ بجمع (1) و (2)

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ: $b=1$ نجد $c=2$

و $a=0$ ومنه: $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $(P_1):y+2z+d=0$

$A\in(P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنـــه: $(P_1):y+2z-3=0$

تعيين معادلة للمستوى (P_2): لدينا (P_2) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيه (d') و

$\overrightarrow{AC}(0;10;-2)$ حيث $C(4;3;3)$ نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (p_1) و (p_2) **متقاطعان وفق مستقيم** (Δ)

بما أن: $\frac{1}{-3}\neq\frac{0}{11}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n}'(11;-3;-15)$ غير

مرتبطين خطيا وعليه يكون المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعين

وفق مستقيم (Δ). لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-1}{11}+9\alpha\\ y=3-22\alpha\ ;\alpha\in\mathbb{R}\\ z=11\alpha\end{cases}$

$(P_1):y+2z-3=0$ ، $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

$(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_1)$

$11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه : $(\Delta)\subset(P_2)$

نستنتج أن $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$

3) أ/* إيجاد إحداثيات A' **المسقط العمودي لـ** A **على المستوى** (Q): $A'(x';y';z')$ ، $\overrightarrow{n_Q}(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A\in(\Delta)$. بما أن: $11x_A+y_A-z_A\neq2$ فإن $A\notin(Q)$

وبالتالي $\overrightarrow{AA'}$ يـوازي $\overrightarrow{n_Q}$ يوجد $k\in\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AA'}=k\cdot\overrightarrow{n_Q}$

أي $\overrightarrow{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$

$\begin{cases}x'-4=11k\\ y'+7=k\\ z'-5=-k\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x'=11k+4\\ y'=k-7\\ z'=-k+5\end{cases}$ ، $A'\in(Q)$ معناه

$11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$ معناه $k=-\frac{10}{41}$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\frac{54}{41};-\frac{297}{41};\frac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) **على المستوى** (Q):

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هوالمستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) **حيث** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

(Γ) هي سطح كرة قطرها $[AB]$، $AB=\sqrt{\frac{17150}{121}}\approx11.9$

ومركزها النقطة $I\left(\frac{43}{22};-2;\frac{5}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابه المباشر مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$:

1) انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 :

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases} A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4 \\ (\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases} A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2 \\ (\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases} A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1 \\ (\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases} A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2} \\ (\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

B0 B1 B3 B4 A0 B2 A0B0 = 8

2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n :

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}}\right)=(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان (ضلعان و زاوية محصورة بينهما) ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3) أ*/ اثبات أن (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف متتالية (u_n) بـ $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$ ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n **بدلالة** n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ، **حساب** δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n$: δ_n م.ح.م.هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $(1)...3x-4y=2$

(1) يكافئ $3x=4y+2$ يكافئ $3x\equiv2[4]$

يكافئ $7\times3x\equiv7\times2[4]$ يكافئ $x\equiv2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد $y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكون النقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ):

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$

$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+...+\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $n\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكافئ $3n=2+4k$ يكافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{Z}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ*/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$

لدينا : $(E)...\ \overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$

$(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$ يكافئ $\overline{z}^3-4\overline{z}^2+7\overline{z}+\overline{z}^2-4\overline{z}+7=0$

يكافئ $\overline{z}^3-3\overline{z}^2+3\overline{z}+7=0$

ب */ نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E) :

(E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-4\overline{z}+7)=0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ يكافئ $\overline{(z+1)(z^2-4z+7)}=0$

يكافئ $\begin{cases} z=-1 \\ z^2-4z+7=0 \end{cases}$ ، $\Delta=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$

$z_1=2-\sqrt{3}i$ و $z_2=2+\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-1;2-\sqrt{3}i\;;2+\sqrt{3}i\right\}$

2)أ/*تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B-z_A)^n$ **عددا حقيقيا سالبا:** لدينا

$$(z_B-z_A)^n=(2+\sqrt{3}i+1)^n=(3+\sqrt{3}i)^n$$

ومنه $(z_B-z_A)^n=(2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B-z_A)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6}=\pi+2k\pi$

إذن $n=12k+6\;;k\in\mathbb{Z}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

بما ان : $AB=AC=BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) أ/* كتابة العدد $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ **على الشكل الأسي:**

$$\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

/*استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D-z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\sqrt{3}\\(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

لاحقتها $z_I=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$

4 /* تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ **:**

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\;;k\in\mathbb{Z}$

/*استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$z+1=2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$ معناه $z-z_A=k(z_B-z_A)$

معناه $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه :من أجل k يمسح المجال $[0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحظ : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=3+i\sqrt{3}$

5)أ/*تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+\alpha\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

$\begin{cases}x_C=\frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha}\\y_C=\frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2=\frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha}\\-\sqrt{3}=\frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha}\end{cases}$ ومنه $\alpha=-3$

ب/* تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث :

$(*)...\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{DM}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MD}\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MD}\right)\right\|\le 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\|\le 2BC$ تكافئ $CM\le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو : $BC=2\sqrt{3}$

جـ/* استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB)$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC=2\sqrt{3}$ و $AC=2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB)$

هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: (07 نقــاط)

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بــ: $g(x)=x^2e^x$

أ/* دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)\succ 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب/* استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0\prec x\prec 1$ فــإن $x\prec\frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فــإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x\succ 1$ فــإن $x\succ\frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فــإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$

أ/* حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$

ب/* نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x)=x^2e^x-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$$

ومنه: $f'(1)=g(1)-g\left(\frac{1}{1}\right)=0$

ج/* تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e=-2.71$	↗	$+\infty$

3) أ/* نبين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5<\beta<1.6$ و $0.5<\alpha<0.6$

$(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تكافئ $(x^2-2x+2)e^x+h(x)=0$

تكافئ $f(x)=0$ ، لدينا: $f(0.5)\approx1.25$ ، $f(0.6)\approx-0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.6)\times f(0.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5<\alpha<0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx-0.60$ ، $f(1.6)\approx0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.6)\times f(1.5)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5<\beta<1.6$ ، $f(\beta)=0$

*/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب/* دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$x^2-2x+2\succ0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

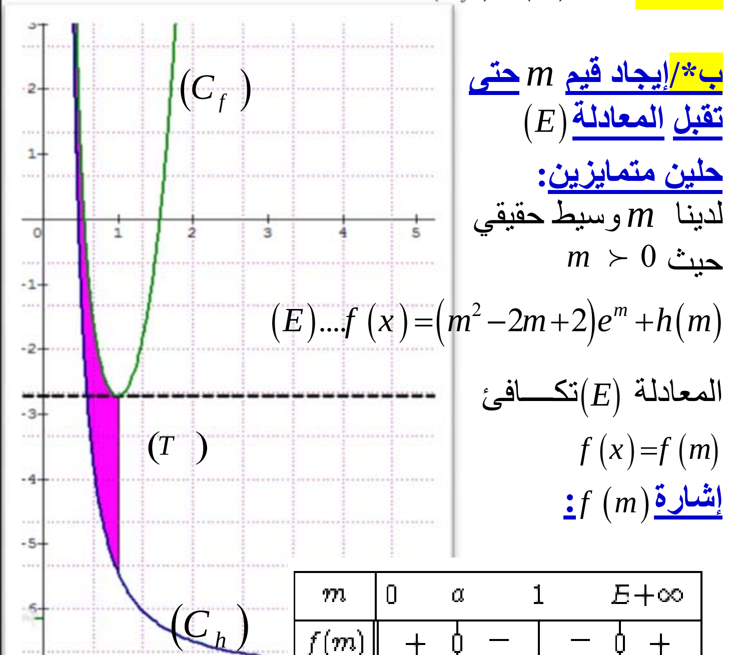
ج/* نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=0;f(1)=-e$

ومنه: $(T):y=-e$

4) أ/* رسم (T) و (C_f) :



ب/* إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m\succ0$

$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$

المعادلة (E) تكـــافئ

$f(x)=f(m)$

إشارة $f(m)$:

m	0		α		1		β		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

من أجـــل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما

$m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) أ/* نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$.

$$[(t^2-4t+6)e^t-3e]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'dt$$

$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

ب*/استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوى المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$ (مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1]$:

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda [f(t)-h(t)]dt=-\int_\lambda^1 [f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda\right)ua$$

*/ حساب $\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to 0} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^\lambda\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/ حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

*/ استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos\widehat{ABC}$ و $Sin\widehat{ABC}$: لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos\widehat{ABC}$

ومنه: $Cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\frac45$

لدينا: $\sin^2\widehat{ABC}=1-Cos^2\widehat{ABC}$

ومنه $\sin\widehat{ABC}=\frac35$ أو $\sin\widehat{ABC}=-\frac35$

ب*/ حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin\widehat{ABC}=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32 ua$$

ج*/ نبين أن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوى (ABC) :

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec n\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

*/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) :

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/ تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\frac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

*/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\frac{2m+5}{6}uv$

لدينا $V_{ABCD}=\frac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\frac13\times\frac32\times\frac{2m+5}{3}=\frac{2m+5}{6}uv$

2) أ*/ نبين أن (Q) هو المستوى المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\frac{-5}{2}$ هناك عدة طرق منها:

*/إحداثيات $I(2;\frac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه $\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec u(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

*/تعيين معادلة (Q): لدينا :

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\frac32-4\alpha+2\beta....(2)\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ $\alpha=\frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\frac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\frac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

$y=\frac32-4\left(\frac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\frac{2z}{5}\right)$ ومنه : $-2x+y=\frac{-5}{2}$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

*/بطريقة آخرى: (Q) يشمل $I\left(2;\frac32;0\right)$ منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق ومنه $(Q): -2x+y=\frac{-5}{2}$ المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

ب*/استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و هما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلـه الوسيطي:

بما أن $\vec n.\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

*/تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

بطرح (2) من (1) نجد:

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0.......(2)\end{cases}$$

$5x-2z-10=0$ نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد

إذن: $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$ و $x=\frac{2}{5}t+2$

$$(\Delta):\begin{cases} x=\frac{2}{5}t+2\\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2} ; t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ) :

$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

بما أن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3) أ*/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m _ (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

ومنه : $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة D(0;0;m) و نصف قطرها $r=3$.

ب*/ تعيين m حتى يكون المستوى (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) :

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه : $m=2$

4) معادلة المستوى (P) الموازي تماما للمستوى (ABC) ويمس (S_m) :

لدينا: $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه : $d=13$ أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن : $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ*/ إثبات أن: $y\equiv4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv-2[11]$ أي $5y\equiv20[11]$ ومنه : $y\equiv4[11]$

ب*/ استنتاج حلول المعادلة (E):

$y\equiv4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$، نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2) أ*/ تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

$n\in\mathbb{N}^*$ ، $b=11n+4$ و $a=5n+2$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه : $d/2$ إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$: لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n : $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/ نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$

ومنه نميز حالتين :

الحالة1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1)\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2)\end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة الأولى في $(-i)$ نجد

$$\begin{cases}-2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}......(1')\\\sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2)\end{cases}$$

بجمع (1') و (2): $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في (1') نجد : $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2) أ*/ كتابة z_A على الشكل الأسي: $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/ نبين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

*/استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :

$$z_B = z_A(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt2 e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه : $z_B=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :

معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \frac{\pi}{4}+k\pi$ لدينا : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt3)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n \equiv \frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ و4 لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'}=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt3-i$$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا:

$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac22=1$ ، $S=\pi R^2$

ومنه : $s=\pi\, u.a$

ج*/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec u;\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$$

$$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt3+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى: لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه B وB' متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا : $A(1;-1)$ و $B'(2+\sqrt3;-1)$

أي : AوB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :

. $z_C=\overline{z_A}=1+i$

*/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt3+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt3}{2}$

4) أ*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي s' حيث: $s'=k^2s=4\pi\, ua$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$، إيجاد طبيعة المثلث OMM':

ومنه : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ، $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه: المثلث OMM' قائم في O

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$: $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $[e+\ln\sqrt{2};+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;e+\ln\sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\frac{\ln2}{2}+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln2}{2}+e$	↗ $+\infty$

2) أ/* نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln2+e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+e+\ln2)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب/* دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2$

$2+e^{2(x-e)}\succ2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln2)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج/* نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من □: $2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x$ من □، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta):x=\frac{1}{2}\ln2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f).

4) أ/* نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$:

$(D_m):y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}-y=0$ معناه

ومنه: جميع المستقيمات $x-e-\frac{\ln2}{2}=0$ و $\frac{\ln2}{2}-y=0$

(D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

ب/* مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ/* التفسير الهندسي للعدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)]_0^1=\ln4-1$$

ب/* نبين أن $0\le I_n\le\ln2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)dX$

$0\le X\le1$ معناه $1\le X^n+1\le2$ معناه $0\le\ln(X^n+1)\le\ln2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le1...(1)\\0\le X^n\le1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases} 0 \le X \le 1 \ldots(1) \\ 0 \le X^n \le 1 \end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1}+1 \le X^n+1$

أي أن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$

نستنتج أن $0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$

ومنه: $0 \le I_{n+1} \le I_n$ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X) \le X$ ، من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \le X$ ، من اجل كل $X \in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)} \succ 0$ بوضع: $X = 1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

وبالتالي $0 \le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right) \le 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0 \le -1+\ln 4 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$

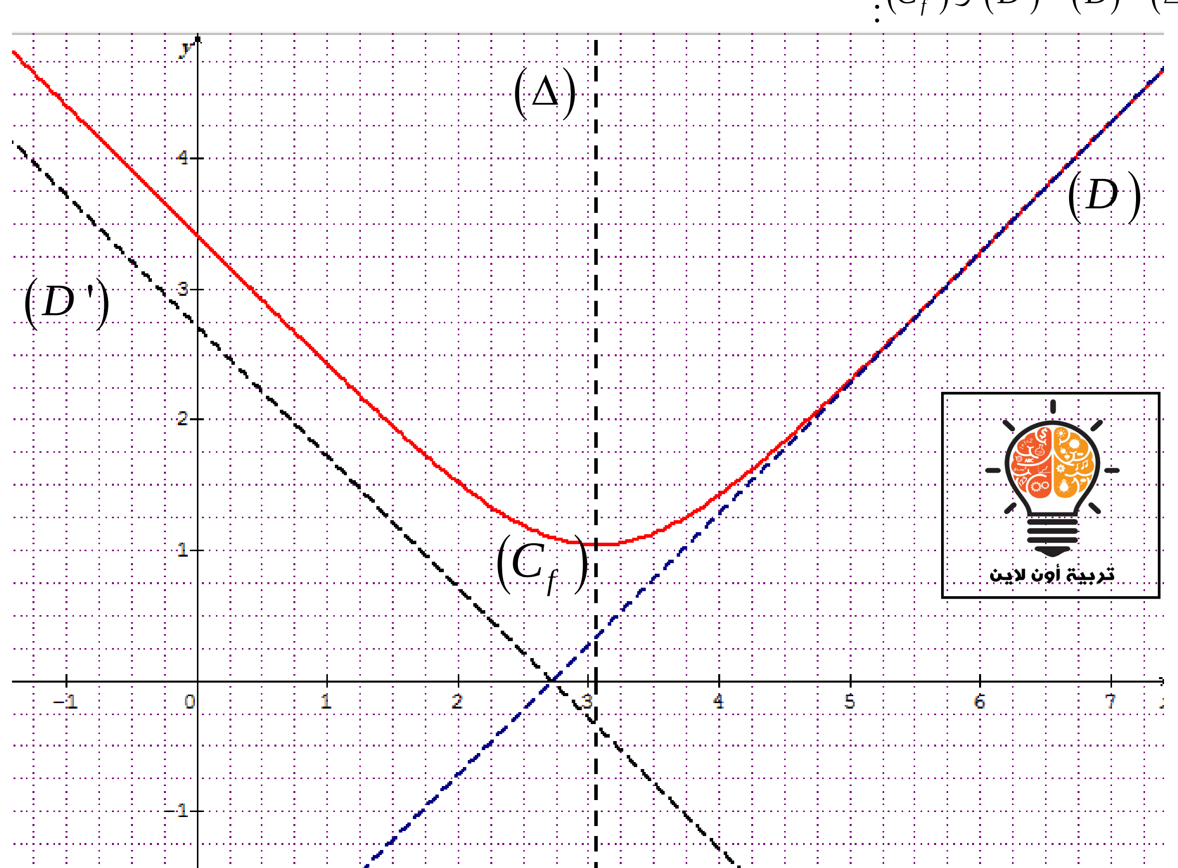
ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I + I_1$:

$$0 \le I + I_1 \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx = -\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)}dx = -\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

$0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$

3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f).



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غرداية

المقاطعة رقم: 01 — دورة ماي 2017

امتحان البكالوريا التجريبي — الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ للفضاء نعتبر النقاط: $A(0;0;2)$ ، $B(0;4;0)$ وَ $C(2;0;0)$

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ؛ ثمّ احسب بُعد النقطة O عن المستوي (ABC) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و العمودي على (BC) .

3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

4) ماذا يمثّل المستقيم (Δ) في المثلّث ABC .

5) بيّن أنّ الجملة: $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (d) المتوسط المار من B في المثلث ABC .

6) بيّن أنّ إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

7) بيّن أنّ النّقطة H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

8) احسب من جديد بُعد النّقطة O عن المستوي (ABC) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين α وَ β حيث: $\begin{cases} 3\alpha+i\beta=2-5i \\ \overline{\alpha}+i\,\overline{\beta}=-2-i \end{cases}$ حيث $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A وَ B نقطتان لاحقتاهما: $z_A=-i$ وَ $z_B=-2-2i$

أ. أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب. أحسب العدد $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2016}$.

ج. عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{n}$ حقيقيا .

3) z عدد مركب صورته M حيث $z\neq-2-2i$ و z' عدد مركب حيث: $z'=\frac{z+i}{z+2+2i}$

أ. عبر هندسيا عن طويلة z' بدلالة AM وَ BM ،ثم استنتج (E) مجموعة النقط M حتى يكون $|z'|=1$. أرسم المجموعة (E) .

ب. عبر هندسيا عن عمدة z' بدلالة $\overrightarrow{AM}$ وَ $\overrightarrow{BM}$ ، استنتج (F) مجموعة النقاط M حيث يكون z' تخيليا صرفا، أرسم المجموعة (F) .

ج. أحسب لاحقة كل من C وَ D نقطتي تقاطع (E) وَ (F) .

د. عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (5,5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $f(x)=x+2-2\ln|2x+1|$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. خذ $\|\vec{i}\|=1cm$

I.

1. احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$ واستنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f).
2. ادرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها.
3. أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.
4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 وأكتب معادلته.
5. أحسب $f(-1)$ وَ $f(0)$، أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m. عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

II. نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x)=-2x+(2x+1)\ln(2x+1)$

1. بيّن أن الدالة F أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة: $h: x\mapsto 2\ln(2x+1)$.
2. احسب بالسنتمتر المربع المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=\frac{3}{2}$ وَ $x=0$.

III. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي: $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-\ln(2x+1)^2$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ يكون لدينا: $-1-x\neq-\frac{1}{2}$ وَ $g(-1-x)=g(x)$
2. استنتج أن (Γ) المنحنى الممثل للدالة g يقبل محور تناظر يطلب تعيين معادلته.
3. أثبت أن $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.
4. استنتج إنشاء (Γ) انطلاقا من (C_f)، ارسم (Γ) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (5,5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ $u_1=\frac{3}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$
3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}$ وَ $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^n}$

اعتمادا على النتيجة التالية: من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$

4. عبّر بدلالة n عن كل من المجموعين S_n وَ T_n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.
5. أ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب) نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) وَ (w_n) متقاربتان حيث $w_n\leq v_n$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\lim\limits_n w_n\leq\lim\limits_n v_n$

." علما أن (u_n) متقاربة نحو العدد l، بين أن: $\frac{5}{6}\leq\ln l\leq 1$، ثم استنتج حصرا للعدد l.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) برهن أن الدوران r ذو الزاوية α و المركز Ω ذو اللاحقة ω هو التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر. $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة البيانية $1cm$

نعتبر التحويل النقطي T في هذا المستوي والذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz+4+4i$$

أ. عين اللاحقة ω للنقطة Ω حيث $T(\Omega)=\Omega$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $z'-4i=i(z-4i)$

ج. استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميّزة.

3) A وَ B نقطتان لاحقتاهما: $z_A=4-2i$ وَ $z_B=-4+6i$

أ. عين لاحقتي النقطتين A' وَ B' صورتي A وَ B على الترتيب بالتحويل T .

ب. علم النقط A' ، B' ، A ، B وَ Ω في المستوي المركب.

4) نسمي p ، m ، n وَ q لواحق النقط P ، M ، N وَ Q على الترتيب منتصفات للقطع المستقيمة: $[A'B]$ ، $[BB']$ $[AA']$ وَ $[B'A]$ على الترتيب.

أ. أحسب p ، m ، n وَ q ثم علم النقط P ، M ، N وَ Q في نفس المعلم السابق.

ب. برهن أن المستقيمين (AB') وَ (ΩN) متعامدان.

ج. بين أن: $\frac{q-m}{n-m}=i$ وَ $\frac{q-p}{m-n}=1$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $MNPQ$.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(-2;1;1)$ والشعاع $\vec{n}(2;1;-5)$ ناظم له، والمستوي (P') ذو المعادلة: $2x+y+z-10=0$

أ. برهن أن المستويين (P) وَ (P') متعامدان.

ب. برهن أن المستويين (P) وَ (P') متقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(3;1;3)$ وَ الموجّه بالشعاع $\vec{u}(-1;2;0)$

ج. احسب المسافة بين النقطة $A(3;1;2)$ والمستقيم (Δ) .

2. نعتبر من أجل كل عدد حقيقي t النقطة $M(3-t;1+2t;3)$ من الفضاء .

أ. عبر عن المسافة AM بدلالة t .

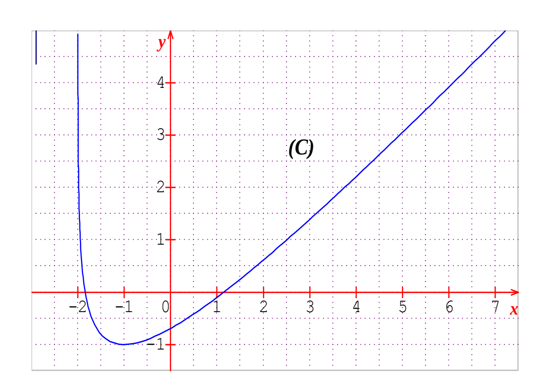
ب. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي t معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(t)=AM$

أدرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج من جديد المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (4,5نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-\ln(x+2)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الشكل المقابل...



1) أحسب $g(-1)$ ، وبقراءة بيانية ، حدد اتجاه تغير الدالة g .

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=3$ وَ $u_{n+1}=g(u_n)$

3) أعد رسم المنحني (C) على ورقتك المليمترية وضع على حامل محور الفواصل الحدود:، u_0 ، u_1 ، u_2 وَ u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

4) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

5) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

6) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

7) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: المعرّفة بـ $v_0=0$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$v_n=\ln(u_0+2)(u_1+2)...(u_{n-1}+2)$$

أ. أثبت أنه من أجل عدد طبيعي n : $v_n=3-u_n$

ب. أستنتج: $\lim\limits_{n}(u_0+2)(u_1+2)...(u_{n-1}+2)$

التمرين الرابع: (06نقاط)

I. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$ نسمي (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f وَ (Γ) المنحنى الذي معادلتة $y=\ln x$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس ووضح النهايات للدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>1$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها.

4. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ، قدم تفسيرا هندسيا للنتيجة.

5. وضح الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) وَ (Γ) .

II. نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة بالمبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1. برهن أن المماس T_a للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر بمبدأ الإحداثيات إذا و فقط إذا كان $f(a)-af'(a)=0$

لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالدستور: $g(x)=f(x)-xf'(x)$

2. برهن أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول.

3. لتكن الدالة u ذات المتغير الحقيقي t والمعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $u(t)=t^3-t^2-t-1$

أ. ادرس تغيرات الدالة u وأنشئ جدول تغيراتها.

ب. بين أن الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج. استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر بالمبدأ O .

د. أثبت أن الحل الوحيد α للمعادلة $u(x)=0$ يحقق: $1,83<\alpha<1,84$.

هـ. استنتج أن معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ O هي $y=\left(\dfrac{1+\alpha^2}{e^\alpha\alpha^2}\right)$.

III. الإنشاء والدراسة البيانية

1. أنشئ هـ المماس (T_{e^α}) والمنحنيين (Γ) وَ (C_f) ، يعطى ما يلي: $\alpha\approx1,8$ وَ $e^\alpha\approx6,26$

2. نعتبر عدد حقيقي m ، من قراءة بيانية أدرس حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$ التي تنتمي إلى المجال $]1;10[$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غـــــرداية

حل نموذجي للامتحان الأبيض لشهادة بكالوريا التعليم الثانوي

ماي2017

المقاطعة الأولى: مادة الرياضيات (شعبة علوم تجريبية) الموضوع الأول.

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	مجموع
التمرين الأول: 04 نقاط		
1) معادلة للمستوي (ABC): $2x+y+2z-4=0$ المسافة بين O وَ (ABC) هي: $d(O;(ABC))=\frac{4}{3}$	0,5 0,5	
2) معادلة ديكارتية للمستوي (P): $x-2y=0$	0,5	**04** نقاط
3) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (P). $\begin{cases} x=4t \\ y=2t \\ z=-5t+2 \end{cases}$ مع $t\in R$	0,5	
4) (Δ) هو العمود النازل من A في المثلث ABC.	0,25	
5) التحقق من أن إحداثيات كلا من النقطتين B وَ $I(1;0;1)$ منتصف القطعة $[AC]$ تحققان الجملة.	0,25+0,25	
6) إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي: $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$	0,5	
7) $H\in(ABC)$ وَ $\overrightarrow{OH}$ يعامد (ABC).	0,5	
8) $d(O;(ABC))=OH=\frac{4}{3}$	0,25	
التمرين الثاني: 05 نقطة		
1) $\alpha=1-i$ وَ $\beta=-2+i$	0,5	
2) أ) $z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ وَ $z_B=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$	0,25+0,25	
ب) $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2016}=e^{504i}=1$	0,5	
ج) $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا معناه $\frac{n\pi}{4}=2k\pi$ مع $k\in Z$ أي $n=8k$.	0,5	**05** نقاط
3) أ) $\lvert\omega'\rvert=\frac{\lvert\omega+i\rvert}{\lvert\omega+2+2i\rvert}=\frac{AM}{BM}$	0,5	
$\lvert\omega'\rvert=1$ معناه $AM=BM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ + رسم (E)	0,5	
ب) $\arg(\omega')=(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})$	0,5	
$\omega'\in iR$ معناه $\begin{cases} (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ M\neq A;M\neq B \end{cases}$ مع $k\in Z$ مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A وَ B + رسم (F)	0,5	

<table>
<tr><td></td><td>0,5

0,5</td><td>$|\omega'|=1$ وَ $\omega'\in iR$ معناه $\omega'=i$ أو $\omega'=-i$ أي $\omega=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ أو $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
وبالتالي: $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_D=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
د) $ABCD$ مربعا (مع التعليل)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>التمرين الثالث: 5,5 نقطة</td></tr>
<tr><td rowspan="6">5,5 نقاط</td><td>0,25+0,25</td><td>1) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\frac{3}{2}-2\ln(0^+)=+\infty$. للمنحني (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=-\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>0,25

0,25

0,25

0,25

0,25</td><td>2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ وَ
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}(2x+1)\left(\frac{x+2}{2x+1}-2\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right)=+\infty\left(\frac{1}{2}-0\right)=+\infty$
f تقبل الاشتقاق على $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ باعتبارها مجموع دوال تقبل الاشتقاق على R وَ $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
$f'(x)=1-\frac{4}{2x+1}=\frac{2x-3}{2x+1}$
f متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ وَ $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$
f متناقصة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td></td><td>$\frac{3}{2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>||</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>↗</td><td>$+\infty$ || $+\infty$</td><td>↘</td><td>$\frac{1}{2}-\ln 4$</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>0,25

0,25</td><td>3) $f(x)=x$ يكافئ $\ln|2x+1|=1$ يكافئ $x=\frac{e-1}{2}$ أو $x=\frac{-e-1}{2}$
إحداثيات نقطتي التقاطع: $\left(\frac{e-1}{2};\frac{e-1}{2}\right)$ وَ $\left(\frac{-e-1}{2};\frac{-e-1}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>0,25+0,25
0,25</td><td>4) $f'(x)=-3$ يكافئ $x=0$. كون للمعادلة حلا واحدا فإن المنحني (C_f) يقبل مماسا واحدا ميله -3 .
معادلة للمماس (T): $y=-3x+2$</td></tr>
<tr><td>0,25

0,5 الرسم

0,25

0,25

0,25

0,25</td><td>5) $f(-1)=1$ وَ $f(0)=2$
6) $f(x)=x+m$ حلولها هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي معادلتها $y=x+m$.
مناقشة:
إذا كان $m<2$ فإن للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.
إذا كان $m=2$ فإن للمعادلة حلين احدهما معدوم والأخر سالب تمام.
إذا كان $m>2$ فإن للمعادلة حلين متمايزين سالبين تماما.
II- 1. من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $F'(x)=2\ln(2x+1)$
.2 $A=\int_0^{\frac{3}{2}}[f(x)-(-3x+2)]dx\,cm^2=\left[-F(x)+2x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}cm^2=(7,5-8\ln 2)cm^2$
III- 1. من أجل كل x من $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، $x\neq-\frac{1}{2}$ منه $-1-x\neq-\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

		وَ $g(-1-x)=\frac{3}{2}+\left\|-1-x+\frac{1}{2}\right\|-\ln[2(-1-x)+1]^2=\frac{3}{2}+\left\|-x-\frac{1}{2}\right\|-\ln(-2x-1)^2=g(x)$
	0,25	2) استنتاج أن المنحني (C_g) يقبل محور تناظر معادلته: $x=-\frac{1}{2}$
	0,25	3) من أجل $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $g(x)=f(x)$
	0,25	4) (Γ) ينطبق على (C_g) في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. ولإتمام رسم (Γ) نأخذ نظير الجزء المرسوم بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$.
		التمرين الرابع: 5,5 نقاط
5,5 نقاط	0,25 0,25 0,5	1. من أجل $n=1$ ، $u_1=\frac{3}{2}>0$ محققة (بداية التراجع) نفرض أن $u_n>0$ محققة إلى غاية الرتبة n . (فرضية التراجع) لدينا: $u_n>0$ منه $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>0$ أي $u_{n+1}>0$ (استنتاج التراجع)
	0,25 0,25 0,5	2. من أجل $n=1$ ، $\ln u_1=\ln\frac{3}{2}=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ محققة (بداية التراجع) نفرض أن $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ محققة إلى غاية الرتبة n . (فرضية التراجع) لدينا: $\ln u_{n+1}=\ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\ln u_n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ $=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ محققة(استنتاج التراجع)
	0,5	3. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}$ وَ $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\le\frac{1}{2^2}$ وَ...وَ $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{1}{2^n}$ بالجمع طرف لطرف نحصل على: $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n$
	0,5+0,5 0,5+0,5	4. $S_n=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$ وَ $T_n=\frac{1}{4}\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ وَ $\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{3}$.
	0,25 0,5 0,25	5. أ) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}u_n>0$. (u_n) متزايدة تماما. ب) $\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=\ln l$ وَ $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right)=\frac{5}{6}$ وَ $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ وبالتالي $\frac{5}{6}\le\ln l\le1$ من $\frac{5}{6}\le\ln l\le1$ ينتج أن $e^{\frac{5}{6}}\le l\le e$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غرداية

حل نموذجي للامتحان الأبيض لشهادة بكالوريا التعليم الثانوي

ماي2017

المقاطعة الأولى: مادة الرياضيات (شعبة علوم تجريبية) الموضوع الثاني.

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول: 05 نقاط		05نقاط
1) $r(M)=M'$ وَ $M \neq \Omega$ معناه $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \end{cases}$ أي $\begin{cases} \left\lvert \frac{z'-\omega}{z-\omega} \right\rvert = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\alpha \end{cases}$ أي $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\alpha}$.	0.75	
2) أ) لدينا $\omega = i\omega + 4 + 4i$ أي $\omega = 4i$. ب) إثبات أن $z'-4i = i(z-4i)$. جـ) طبيعة T: T دوران مركزه النقطة $\Omega(4i)$ والزاوية $\alpha = \frac{\pi}{2}$.	3×0.25	
3) أ) $z_{A'} = 6+8i$ وَ $z_{B'} = -2$. ب) تعليم النقط.	2×0.25 0.75	
4) أ) منتصفات القطع: $m=5+3i$ ، $n=1+7i$ ، $p=-3+3i$ وَ $q=1-i$. ب) إثبات أن $(B'A)$ يعامد (ΩN) ، لدينا: $\frac{z_A - z_{B'}}{n-\omega} = -2i$ إذن $-\frac{\pi}{2}$ قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega N};\overrightarrow{B'A})$. ج) إثبات أن $\frac{q-m}{n-m}=i$ وأن $\frac{q-p}{m-n}=1$ ، ينتج $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ})=\frac{\pi}{2}$ وَ $MN=MQ$ وَأن $(PQ)//(MN)$ وَ $MN=PQ$ ينتج أن الرباعي $MNPQ$ مربع.	4×0.25 0.5 0.75	
التمرين الثاني: 4.5 نقطة		4.5
1) أ) المستوي (P) يعامد (P') لأن $\vec{n}.\vec{n'}=0$ حيث $\vec{n}(2;1;1)$. ب) بما أن (P) يعامد (P') فإن المستويين متقاطعان وفق مستقيم، وبما أن $C \in (P)\cap(P')$ وأن $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{u}.\vec{n'}=0$ فإن (Δ) مستقيم التقاطع. جـ) المسافة: $d(A;(\Delta))=\sqrt{d^2(A;(P))+d^2(A;(P'))}=1 \quad u.l$.	0.75 01 0.5	
2) $AM=\sqrt{5t^2+1}$. ب) بما أن $h'(t)=\frac{5t}{\sqrt{5t^2+1}}$ فإن الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ النقطة M تمسح المستقيم (Δ) ،إذن المسافة $u.l$ $d(A;(\Delta))=h(0)=1$.	0.5 1 0.75	
التمرين الثالث: 4.5 نقطة		
1) $-1 = (-1)-$، الدالة g متناقصة تماما على $]-2; -1]$ ومتزايدة تماما على $[-1; +\infty[$.		4.5 نقاط

	01	2) تمثيل الحدود الأربعة الأولى على محور الفواصل. (u_3 ، u_2 ، u_1 ، u_0)
	01	3) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq -1$. بداية التراجع: من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 = 3 \geq -1$ الخاصية محققة. فرضية التراجع: نفرض أن $_n \geq -1$ محققة إلى غاية الرتبة n برهان التراجع: نبين أن $_{n+1} \geq -1$. لدينا من الفرضية $_n \geq -1$ وبما أن g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ فإن $g(u_n) \geq -1$ أي $u_{n+1} \geq -1$.
	0.5	4) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة: من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n+2) \geq 0$ لأن $u_n \geq -1$.
	0.75	5) المتتالية (u_n) متقاربة كونها متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq -1)$ النهاية: $_n = l$ lim ومنه $\ln(l+2) = 0$ أي $l = -1$ ومنه $\lim u_n = -1$
	0.75 0.5	6) أ) إثبات أن $_n = 3 - u_n$: لدينا من أجل كل عدد طبيعي $_{n+1} = u_n - \ln(u_n+2)$ أي $\ln(u_n+2) = u_n - u_{n+1}$ ومنه $v_n = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) = u_0 - u_n = 3 - u_n$ ب) استنتاج النهاية: لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left((u_0+2)(u_1+2)\ldots(u_{n-1}+2)\right) = \lim(e^{v_n}) = e^4$.
		التمرين الرابع: 06 نقاط
6 نقاط	2×0.25 0.25 0.25 0.25	I) 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$. مع التوضيح 2) حساب المشتقة: $f'(x) = \frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$ بعد تحديد مجموعة قابلية الاشتقاق 3) الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$، جدول تغيراتها في المقابل.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

	2×0.25	4) $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \ln x) = 0$ منه المنحنيين (C) و(Γ) متقاربان بجوار $+\infty$.
	0.25	5) وضعية المنحنيين (C) و(Γ): $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x} < 0$ منه (C) فوق(Γ) على $]1;+\infty[$.
	0.25	II) 1) إثبات أن المماس (T_a) للمنحنى (C) يمر من المبدأ معناه $f(a) - af'(a) = 0$.
	0.25	2) إثبات أن للمعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ نفس الحلول.
	2×0.25 2×0.25 0.25	3) أ) تغيرات الدالة u: $\lim_{t\to+\infty}(t) = +\infty$ ، $\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty$. لدينا $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t+1)(t-1)$ إذن u متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ ومتزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و$[1;+\infty[$. جدول التغيرات:

t	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$		1	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	−	0	+
$u(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{-22}{27}$	↘	-2	↗ $+\infty$

	0.25	ب) إثبات ان الدالة u تنعدم عند قيمة واحدة فقط. بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال

	0.25	$]1;+\infty[$ وهي سالبة تماما على المجال $]-\infty;1[$. ج) بما المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ أي المعادلة $f(x)-xf'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا إذن يوجد مماس واحد لـ (C) يمر من المبدأ O.
	0.25	د) المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ وبما أن $u(1.83)\times u(1.84)\cong -1.968\times10^{-4}$ فإن $1.83<\alpha<1.84$.
	0.25	هـ) بما أن حل المعادلة $u(t)=0$ هو α فإن حل المعادلة $g(x)=0$ هو $x=e^{\alpha}$ ومنه معادلة المماس $(T_{e^{\alpha}})$ المار من المبدأ من الشكل $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}}\right)x$.
	1	III) 1) إنشاء المستقيم $(T_{e^{\alpha}})$ والمنحنيين (C) و (Γ):
	0.25	2) حلول العادلة $f(x)=mx$ على المجال $]1;10[$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx$، نميز الحالات الآتية: * إذا كان $m\in\left]-\infty;\frac{f(10)}{10}\right]$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلا واحدا على المجال $]1;10[$. * إذا كان $m\in\left]\frac{f(10)}{10};\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}}\right[$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلين متمايزين على المجال $]1;10[$. * إذا كان $m=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}}$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلا مضاعفا على المجال $]1;10[$ هو e^{α}. * إذا كان $m\in\left]\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2e^{\alpha}};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=mx$ لا تقبل حلولا على المجال $]1;10[$.